Document Type: Full length research Paper

Dispersion potential of a ground-state atom in the presence of nonlocal magnetoelectric media

Hamid Rasti, Hassan Safari*

Department of Photonics, Graduate University of Advanced Technology, Kerman, Iran

Received: 01.11.2020 Final revised: 13.12.2022 Accepted: 27.01.2023

Doi link: 10.22055/jrmbs.2023.18125

Abstract

The dispersion potential for a single ground-state of an electric and/or magnetic atom has been generalized in the presence of magnetoelectric media, making use of perturbation theory to the ones with nonlocal responses. As the final relation depends on the geometry of the system, the Casimir-Polder force in such systems can be obtained by calculating the gradient of the potential. It will be seen that the potential formula is totally similar to the previously obtained relation for local media. The dependence of the final relation on the Green tensor, geometrically similar systems with different natures of responses to the electromagnetic field may present different results for dispersion potential.

Keywords: Dispersion potential, Dissipative magnetoelectric body, Nonlocal media, Green tensor

Corresponding Author*: h.safari@kgut.ac.ir

مقاله پژوهشی کامل

پتانسیل پاشندگی یک اتم حالت پایه در محیط‌های مغناطوالکتریک اتلافی با پاسخ غیر موضعی

حمید راستی، حسن صفری*

گروه فوتونیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته، کرمان، ایران

دریافت: ۱۳۹۹/۰۸/۱۱ ویرایش نهائی: ۱۴۰۱/۰۹/۲۲ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۱/۰۷

Doi link: 10.22055/jrmbs.2023.18125

چکیده

به‌کمک روش اختلال، رابطهٔ انرژی پتانسیل پاشندگی یک اتم الکتریکی و یا مغناطیسی حالت پایه در حضور مواد مغناطوالکتریک اتلافی را به محیط‌های غیرموضعی تعمیم داده‌ایم. از آنجایی که رابطهٔ نهایی به هندسهٔ سیستم وابسته است، می‌توان نیروی کازیمیر-پولدر را نیز در چنین سیستم‌هایی با محاسبهٔ شیب انرژی پتانسیل به‌دست آورد. اگرچه رابطهٔ پتانسیل به لحاظ شکل ظاهری کاملاً مشابه با رابطهٔ متناظر در محیط‌های موضعی می‌باشد که پیش‌تر به‌دست آمده است، اما به‌دلیل تفاوت تانسور گرین محیط‌های موضعی با محیط غیرموضعی و وابستگی رابطهٔ نهایی پتانسیل پاشندگی به تانسور گرین محیط، نتایج کاملاً متفاوتی به‌دست می‌آوریم.

کلیدواژگان: انرژی پتانسیل پاشندگی، مواد مغناطوالکتریک اتلافی، محیط غیرموضعی، تانسور گرین

مقدمه

بر اساس فرمول‌بندی الکترودینامیک کلاسیک، به یک اتم یا مولکول خنثی و غیر قطبیده، در فضای آزاد بدون چگالی بار و جریان الکتریکی و در غیاب میدان الکترومغناطیسی (خلأ الکترومغناطیسی) نیرویی وارد نمی‌شود. اما فرمول‌بندی مکانیک کوآنتومی برای چنین سیستم‌هایی وجود نوعی انرژی پتانسیل را پیشگویی می‌کند که به پتانسیل پاشندگی معروف است و بستگی به موقعیت نسبی اتم در محیط مادی پیرامون خود، خصوصیات الکترومغناطیسی محیط، و خصوصیات الکترونی اتم دارد. وابستگی این انرژی پتانسیل به موقعیت اتم در محیط سبب می‌شود که حتی یک اتم یا مولکول خنثی و غیر قطبیده نیز در چنین محیطی، نوعی نیروی صرفاً کوآنتومی موسوم به نیروی پاشندگی را تجربه کند. در توضیح منشأ این نیرو باید گفت در چارچوب الکترودینامیک کوآنتومی، برای یک فضای آزاد بدون چگالی بار و جریان الکتریکی حتی اگر مقدار میانگین میدان الکترومغناطیسی در حالت پایه صفر باشد، نوساناتی معروف به نوسانات نقطهٔ صفر (نوسانات خلأ) در نتیجه اصل عدم قطعیت هایزنبرگ همچنان وجود خواهند داشت. این میدان افت و خیزی نیز باعث ایجاد دوقطبی‌های الکتریکی و مغناطیسی لحظه‌ای در اتم شده، که برهم‌کنش این دوقطبی‌ها با

* نویسنده مسئول: h.safari@kgut.ac.ir

محیط مغناطو الکتریک پیرامون خود، باعث می‌شود به اتم نیرو وارد شود. دسته‌ای از نیروهای پاشندگی را که بین اتم‌ها و اجسام ماکروسکوپی اعمال می‌شود، نیروهای کازیمیر-پولدر می‌نامند. اتم‌های موجود در سیستم مورد بررسی همواره با جذب یا تولید فوتون بین حالت‌های مجاز خود گذار انجام می‌دهند.

برحسب خواص اسپینی اتم‌ها در برخی از گذارها خواص الکتریکی اتم، و در برخی خواص مغناطیسی آن غالب است. چنین اتم‌هایی را، به‌ترتیب، اتم‌های الکتریکی و مغناطیسی می‌نامند. نیروی پاشندگی برای یک اتم الکتریکی در حضور یک دیوارهٔ تخت رسانا و با در نظر گرفتن نیرو به‌صورت شیب یک تابع پتانسیلی در سال ۱۹۳۲توسط لنارد جونز محاسبه شد [۱]. او در مسیر این محاسبه برهم‌کنش بین اتم و دیواره را به‌صورت برهم‌کنش دوقطبی لحظه‌ای اتم با بار تصویری‌اش در نظر گرفت. پس از او کازیمیر و پولدر مسئله مشابهی را در چارچوب الکترودینامیک کوآنتومی برای یک اتم الکتریکی حالت پایه در حضور دیوارهٔ رسانا [۲،۳] محاسبه کردند. پژوهش‌ها در این زمینه با محاسبهٔ نیروی کازیمیر-پولدر یک اتم برانگیخته در حضور دیوارهٔ رسانا [۴]، اتم‌ها و مولکول‌های برانگیخته یا حالت پایه در برابر سطوح مختلف با جنس‌های متفاوت [۱۰-۵]، اتم‌های چرخان [۱۱]، مقایسه با اتم‌های تحت تأثیر لیزر [۱۲] اتم‌ها و مولکلول‌ها در برابر اجسام ماکروسکوپی [۱۳] ادامه دارد. پتانسیل پاشندگی بین اتم‌ها موسوم به پتانسیل وان‌دروالس برای اتم‌های مغناطیسی توسط فینبرگ و زوخر محاسبه شد [۱۴]، اتم‌های ناهم‌نوع (یکی الکتریکی و دیگری مغناطیسی) [۱۵و۱۶]، محیط‌های دی‌الکتریک [۱۷و۱۸]، مغناطوالکتریک [۲۱-۱۹]، مولکول‌های دست‌سان [۲۲]، اتم‌های هم‌بسته [۲۳] هندسه‌های پیچیده‌تر [۲۷-۲۴] و اتم‌های برانگیخته [۳۱-۲۸] و حالت پایه [۳۲] از جمله تحقیقاتی بودند که برای دست یافتن به یک فرمول جامع، به انجام رسیده‌اند (ذکر مفصل کارهای انجام شده از لحاظ تنوع و نیز سیر تاریخی، در این مقاله امکان‌پذیر نیست). در کارهای به‌انجام‌رسیده، بنا بر اطلاع ما تا کنون پاسخ مواد به میدان الکترومغناطیسی، تنها به‌صورت موضعی در نظر گرفته شده است، بدین معنا که میدان الکترومغناطیسی در یک نقطه از محیط (پاسخ)، تنها به قطبش و مغناطش (محرّک) در همان نقطه وابسته است. در این مقاله قصد داریم با در دست داشتن طرح کوآنتش میدان در محیط‌های غیرموضعی [۳۳]، فرمول پتانسیل پاشندگی را به اتم‌های الکتریکی و مغناطیسی در حضور ماده غیرموضعی (که قطبش و مغناطش در هر نقطه از محیط، به تابع پاسخ محیط به میدان در سایر نقاط نیز وابسته است) تعمیم دهیم. به‌این‌ترتیب می‌توان ادعا کرد که مورد کلّی‌تری را به‌عنوان مسئله در نظر گرفته‌ایم زیرا می‌توانیم با اعمال شرایط حدی مناسب بر نتایجی که به‌دست آورده‌ایم به روابط حاکم در محیط‌های موضعی نیز دست یابیم.

معرفی فرمول‌بندی کوآنتش میدان الکترومغناطیسی در محیط‌های غیرموضعی

هامیلتونی سیستمی شامل یک اتم و میدان الکترومغناطیسی در حضور محیط دی‌الکتریک اتلافی، به‌صورت:

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_F + \hat{H}_{AF} \qquad ۱$$

بیان می‌شود. در این رابطه $\hat{H}_A$، $\hat{H}_F$ و $\hat{H}_{AF}$ به‌ترتیب، هامیلتونی اتم، هامیلتونی میدان (الکترومغناطیسی) و هامیلتونی برهم‌کنش اتم-میدان هستند که در ادامه این بخش به تعریف آنها می‌پردازیم. در هامیلتونی اتم که به‌صورت

$$\hat{H}_A = \sum_k E_k^A \,|k\rangle\langle k| \qquad ۲$$

بیان می‌شود، $|k\rangle$ ویژه‌حالت اتم و E_k^A ویژه‌مقدار انرژی این ویژه‌حالت است. هامیلتونی میدان برحسب عملگرهای کاهش و افزایش فوتون، $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{r},\omega)$ و $\hat{\mathbf{f}}^\dagger(\mathbf{r},\omega)$، که روابط جابه‌جایی:

$$\left[\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{r},\omega),\hat{\mathbf{f}}^\dagger(\mathbf{r}',\omega')\right] = \mathbf{I}\delta(\omega-\omega')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \qquad ۳$$

$$\left[\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{r},\omega),\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{r}',\omega')\right] = 0 \qquad ۴$$

را دارند، به‌صورت:

$$\hat{H}_F = \int_0^\infty d\omega \int d^3r \hbar\omega \hat{\mathbf{f}}^\dagger(\mathbf{r},\omega)\cdot\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{r},\omega) \qquad ۵$$

داده می‌شود [۳۴]. اگر حالت پایه میدان را با $|\{0\}\rangle$ نمایش دهیم:

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{r},\omega)\,|\{0\}\rangle = 0 \qquad \forall \mathbf{r},\omega \qquad ۶$$

حالات برانگیخته میدان با اثر دادن متوالی عملگر $\hat{\mathbf{f}}^\dagger$ بر روی حالت پایه به‌دست می‌آیند. به‌عنوان نمونه اولین حالت برانگیخته با رابطه:

$$\hat{\mathbf{f}}^\dagger(\mathbf{r},\omega)\,|\{0\}\rangle = |\mathbf{1}(\mathbf{r},\omega)\rangle \qquad ۷$$

تعریف می‌شود.

هامیلتونی برهم‌کنش اتم-میدان با استفاده از تقریب طول موج بلند برای یک اتم الکتریکی عبارت است از:

$$\hat{H}_{AF} = -\hat{\mathbf{d}}\cdot\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_A) - \hat{\mathbf{m}}\cdot\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}_A) \qquad ۸$$

[۳۴] که در آن $\hat{\mathbf{d}}$ و $\hat{\mathbf{m}}$، به‌ترتیب، گشتاور دوقطبی الکتریکی و مغناطیسی اتم، $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_A)$ میدان الکتریکی، و $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}_A)$ میدان مغناطیسی در محل اتم $(\mathbf{r}_A)$ است.

عملگرهای میدان الکتریکی و مغناطیسی در حضور محیطی که پاسخ غیرموضعی به میدان دارد، نیز برحسب عملگرهای کاهش و افزایش فوتون با روابط:

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = i\mu_0\int_0^\infty d\omega\sqrt{\frac{\hbar\omega^3}{\pi}}\int d^3r'\int d^3r'' \times\left\{\left[\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)\cdot\mathbf{K}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'',\omega)\cdot\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{r}'',\omega)\right] - \text{H.c.}\right\}, \qquad ۹$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = \mu_0\int_0^\infty d\omega\sqrt{\frac{\hbar\omega}{\pi}}\int d^3r'\int d^3r'' \left\{\nabla\times\left[\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)\cdot\mathbf{K}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'',\omega)\cdot\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{r}'',\omega)\right] + \text{H.c.}\right\}, \qquad ۱۰$$

داده می‌شوند [۳۳][1]. در روابط۹ و ۱۰، تانسور گرین $\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)$، جواب یکتای معادلهٔ دیفرانسیل:

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega) - \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega) - i\mu_0\omega\int d^3r''\,\mathbf{Q}(\mathbf{r},\mathbf{r}'',\omega)\cdot\mathbf{G}(\mathbf{r}'',\mathbf{r}',\omega) = \mathbf{I}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \qquad ۱۱$$

با شرط مرزی:

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\to\infty \Rightarrow \mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)\to 0 \qquad ۱۲$$

[1] از آن‌جا که مابقی تعاریف این بخش از مرجع [۳۳] آورده شده‌اند، در ادامه این بخش از اشاره مکرر به مرجع [۳۳] خودداری می‌کنیم.

است. کرنل تانسوری انتگرال $\mathbf{K}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)$ نیز، در معرفی چگالی جریان نوفه برحسب عملگر بوزونی کاهش فوتون با رابطه:

$$\hat{\mathbf{j}}_N(\mathbf{r},\omega)=\sqrt{\frac{\hbar\omega}{\pi}}\int d^3r'\mathbf{K}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)\cdot\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{r}',\omega) \quad ۱۳$$

وارد فرمول‌بندی می‌شود. تانسور رسانندگی $\mathbf{Q}$ نقش تابع پاسخ را برای محیط مورد نظر ایفا می‌کند و بخش حقیقی آن متناسب با بخش موهومی تانسور گذردهی الکتریکی محیط است و اتلاف انرژی الکترومغناطیسی محیط را مشخص می‌کند.

تانسورهای گرین $\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)$، کرنل $\mathbf{K}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)$ و رسانندگی $\mathbf{Q}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)$، روابط انتگرالی به‌صورت:

$$\int d^3r''\mathbf{K}(\mathbf{r},\mathbf{r}'',\omega)\cdot\mathbf{K}^{*\top}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'',\omega)$$
$$=\mathrm{Re}\mathbf{Q}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)\,, \quad ۱۴$$

$$\mu_0\omega\int d^3r_1\int d^3r_2$$
$$\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1,\omega)\cdot\mathrm{Re}\mathbf{Q}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\omega)\cdot\mathbf{G}^*(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}',\omega)$$
$$=\mathrm{Im}\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)\,, \quad ۱۵$$

دارند که برای محاسبهٔ پتانسیل پاشندگی مفید واقع می‌شوند. تانسورهای $\mathbf{Q}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)$ و $\mathbf{K}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)$ به‌عنوان یک تابع پاسخ در فضای فرکانس، همانند مورد مشابه در محیط‌هایی با پاسخ موضعی، هم‌چون تانسور گرین $\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)$، در نیمه بالایی صفحه فرکانسِ مختلط تحلیلی هستند، بنابر اصل علّیت روابط کرامرز-کرونیگ را برآورده می‌کنند، و از اصل انعکاس شوارتز:

$$\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)=\mathbf{G}^*(\mathbf{r},\mathbf{r}',-\omega^*)\,, \quad ۱۶$$

و رابطهٔ تقارنی اونزاگر[1]:

$$\mathbf{G}^{\top}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)=\mathbf{G}(\mathbf{r}',\mathbf{r},\omega)\,, \quad ۱۷$$

پیروی می‌کنند. لازم به یادآوری است که روابط متناظر مربوط به محیط‌های موضعی را می‌توان از جانشانی $\mathbf{K}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)$ با $\mathbf{K}(\mathbf{r},\omega)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ به‌دست آورد (برای روابط در محیط با پاسخ موضعی، مرجع [۳۵] را ببینید).

محاسبهٔ پتانسیل پاشندگی یک اتم حالت پایه در محیط‌های غیرموضعی

روشی که برای محاسبهٔ پتانسیل پاشندگی در این مقاله به‌کار می‌بریم، روش اختلال است. بدین صورت که $\hat{H}_{AF}$ را به‌عنوان جملهٔ اختلالی که به هامیلتونی $\hat{H}_0=\hat{H}_A+\hat{H}_F$ افزوده شده است، در نظر می‌گیریم. زیرا معمولاً هامیلتونی برهم‌کنش اتم-میدان در مقایسه با هامیلتونی‌های اتم و میدان بسیار کوچک است.

سیستم مرکب اتم-میدان را در حالت کوآنتومی در نظر می‌گیریم که در آن، هم میدان و هم اتم در حالت پایه قرار دارند، $|0\rangle\equiv|0\rangle_A\,|\{0\}\rangle$، و پتانسیل پاشندگی را به‌عنوان *اولین مرتبهٔ غیرصفر* جابه‌جایی انرژی در نظر می‌گیریم. از آنجا که عناصر قطری $\hat{\mathbf{d}}$ و $\hat{\mathbf{m}}$ در فضای هیلبرت بسط‌یافته از حالات اتمی صفر هستند، حاصل اختلال مرتبهٔ اول برای جابه‌جایی انرژی صفر خواهد شد:

$$\Delta E^{(1)}=\langle 0|-\hat{\mathbf{d}}\cdot\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_A)-\hat{\mathbf{m}}\cdot\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}_A)|0\rangle=0 \quad ۱۸$$

بنابراین، پتانسیل پاشندگی را با محاسبهٔ جابه‌جایی مرتبهٔ دوم انرژی به‌دست می‌آوریم:

[1] Onsager Reciprocity

$$\Delta E^{(2)} = -\sum_{I\neq 0} \frac{\langle 0|\hat{H}_{AF}|I\rangle\langle I|\hat{H}_{AF}|0\rangle}{E_I - E_0}. \quad ۱۹$$

صورت کسر اختلالی را می‌توان متناظر با فرایندی در نظر گرفت که در آن، سامانهٔ مرکب اتم–میدان تحت تأثیر هامیلتونی اختلالی، از حالت پایه $|0\rangle$ به‌حالت میانی $|I\rangle$ رفته (با عنصر ماتریسی $\langle I|\hat{H}_{AF}|0\rangle$)، و سپس، دوباره به‌حالت پایه پایه برمی‌گردد (با عنصر ماتریسی $\langle 0|\hat{H}_{AF}|I\rangle$). با توجه به روابط۹ و ۱۰ که نشان می‌دهند میدان الکترومغناطیسی ترکیب خطی از عملگرهای کاهش و افزایش فوتون است، این عناصر ماتریسی در صورتی غیر صفر هستند که در حالت میانی، میدان الکترومغناطیسی تنها دارای یک فوتون باشد. از سوی دیگر، هیچ‌یک از دوقطبی‌های الکتریکی و مغناطیسی اتم در فضای هیلبرت ویژه‌حالات اتمی عنصر قطری ندارند. بنابراین، صورت کسر اختلال مرتبهٔ دوم، رابطهٔ۱۸، تنها در صورتی غیر صفر است که در آن، اتم در یک حالت برانگیخته باشد:

$$|I\rangle \to |k\rangle_A |\mathbf{1}(\mathbf{r},\omega)\rangle,\ E_I = E_k + \hbar\omega. \quad ۲۰$$

نکتهٔ دیگری که در محاسبهٔ جابه‌جایی انرژی می‌توان از آن استفاده کرد، تفاوت قواعد انتخاب در گذار دوقطبی الکتریکی در مقایسه با مغناطیسی است. این موجب می‌شود به‌ازای هر انتخاب برای حالت میانی $|I\rangle$، تنها یکی از گذارهای دوقطبی الکتریکی یا مغناطیسی در اتم امکان‌پذیر باشد، که به نوبهٔ خود، اجازه می‌دهد سهم گذارهای الکتریکی و مغناطیسی را جداگانه محاسبه کنیم. در این مقاله، این جداسازی را با به‌کارگیری اصطلاح اتم الکتریکی یا اتم مغناطیسی انجام می‌دهیم، به این صورت که هامیلتونی اختلالی را در اتم الکتریکی با $-\hat{\mathbf{d}}\cdot\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_A)$، و در اتم مغناطیسی را با $-\hat{\mathbf{m}}\cdot\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}_A)$ جایگزین می‌کنیم.

نماد جمع در رابطهٔ۱۹، شامل جمع روی متغیرهای پیوسته (موقعیت و فرکانس) و نیز متغیر گسسته برای ویژه‌حالات اتمی است:

$$\sum_I \to \sum_k \int d^3r \int_0^\infty d\omega. \quad ۲۱$$

پتانسیل پاشندگی یک اتم الکتریکی حالت پایه در محیط غیرموضعی

برای یک اتم الکتریکی با استفاده از رابطهٔ۹ همراه با روابط جابه‌جایی ۳ و ۴، عنصر ماتریسی موجود در صورت کسر اختلالی رابطهٔ۲۰ را به‌صورت:

$$\begin{aligned}
&\langle 0|-\hat{\mathbf{d}}\cdot\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_A)|I\rangle \\
&= \langle\{0\}|\,{}_A\langle 0|-\hat{\mathbf{d}}\cdot\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_A)|k\rangle_A\,|\mathbf{1}(\mathbf{r},\omega)\rangle \\
&= i\mu_0\sqrt{\frac{\hbar\omega^3}{\pi}}\int d^3r' \\
&\quad\times\left\{\mathbf{d}_{0k}\cdot\mathbf{G}(\mathbf{r}_A,\mathbf{r}',\omega)\cdot\mathbf{K}(\mathbf{r}',\mathbf{r},\omega)\right\} \quad ۲۲
\end{aligned}$$

به دست می‌آوریم که در آن $\mathbf{d}_{0k} = {}_A\langle 0|\hat{\mathbf{d}}|k\rangle_A$. با قرار دادن۲۲ و مزدوج هرمیتی‌اش در ۱۹ و با استفاده از روابط ۳، ۷ و ۲۳، و با توجه به اتّحاد $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^\top\cdot\boldsymbol{a}$ که در آن $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{T}$ به‌ترتیب یک بردار و یک تانسور مرتبهٔ دوم دلخواه هستند، جابه‌جایی مرتبهٔ دوم انرژی را به‌صورت:

$$\begin{aligned}
\Delta E_e^{(2)} &= -\sum_k \int_0^\infty d\omega \int d^3r \int d^3r_1 \int d^3r_2 \\
&\times \frac{\mu_0^2\omega^3}{\pi(\omega_{k0}+\omega)}\mathbf{d}_{0k}\cdot\mathbf{G}(\mathbf{r}_A,\mathbf{r}_1,\omega)\cdot\mathbf{K}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r},\omega) \\
&\cdot\mathbf{K}^{*\top}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r},\omega)\cdot\mathbf{G}^*(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_A,\omega)\cdot\mathbf{d}_{k0} \quad ۲۳
\end{aligned}$$

به‌دست می‌آوریم. در رابطهٔ۲۳، ω_{k0} فرکانس گذار اتمی است. انتگرال‌های موقعیت در رابطهٔ۲۳ را می‌توان

با استفاده از روابط انتگرالی ۱۴ و ۱۵ محاسبه کرد. به‌این منظور، ابتدا با استفاده از رابطهٔ۱۴ انتگرال $\mathbf{r}$ را می‌گیریم و به‌رابطهٔ:

$$\Delta E_e^{(2)} = -\sum_k \int_0^\infty d\omega \frac{\mu_o^2 \omega^3}{\pi(\omega_{k0}+\omega)} \int d^3r' \int \mathrm{d}^3 r'' \times \Big[\mathbf{d}_{0k} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}', \omega) \cdot \mathrm{Re}\mathbf{Q}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \omega) \cdot \mathbf{G}^*(\mathbf{r}'', \mathbf{r}_A, \omega) \cdot \mathbf{d}_{k0}\Big]. \quad ۲۴$$

می‌رسیم. سپس با استفاده از رابطهٔ۱۵ حاصل انتگرال‌های $\mathbf{r}'$ و $\mathbf{r}''$ را برحسب قسمت موهومی تابع گرین به‌دست می‌آوریم که به‌رابطهٔ:

$$\Delta E_e^{(2)} = -\frac{\mu_0}{\pi} \sum_k \int_0^\infty \mathrm{d}\omega \frac{\omega^2}{\omega_{k0}+\omega} \times \mathbf{d}_{0k} \cdot \mathrm{Im}\mathbf{G}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_A, \omega) \cdot \mathbf{d}_{k0} \quad ۲۵$$

منجر می‌شود. با توجه به‌تحلیلی بودن تابع گرین در نیمهٔ بالایی صفحه فرکانس مختلط، با انتخاب پربند مناسب که در آن محور موهومی را با u نشان می‌دهیم، می‌توان تغییر متغیر $\omega \to iu$، را به‌کار برد:

$$\mathrm{Im}\int_0^\infty d\omega \frac{\omega^2}{\omega_{k0}+\omega} \mathbf{G}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_A, \omega) = \mathrm{Im}\int_0^\infty idu \frac{-u^2(\omega_{k0}-iu)}{\omega_{k0}^2+u^2} \mathbf{G}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_A, iu) = -\int_0^\infty du \frac{u^2\omega_{k0}}{\omega_{k0}^2+u^2} \mathbf{G}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_A, iu). \quad ۲۶$$

در نوشتن رابطهٔ۲۶ از این نکته نیز استفاده کردیم که، بنا بر اصل انعکاس شوارتز، تانسور گرین برای فرکانس موهومی، حقیقی است. از طرفی، برای دو بردار دل‌خواه $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ و تانسور $\boldsymbol{T}$ می‌توان نوشت:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{b} = a_i T_{ij} b_j = b_j a_i T_{ij} = \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{ba} \cdot \boldsymbol{T}\right).$$

با استفاده از این اتّحاد و جانشانی رابطهٔ۲۶ در رابطهٔ۲۵، جابه‌جایی مرتبهٔ دوم انرژی به‌شکل:

$$\Delta E_e^{(2)} = \frac{\mu_0}{\pi} \int_0^\infty du\, u^2 \sum_k \frac{\omega_{k0}}{\omega_{k0}^2+u^2} \times \mathrm{tr}\left[\mathbf{d}_{0k}\mathbf{d}_{k0} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_A, iu)\right] \quad ۲۷$$

در می‌آید. حال، با استفاده از تعریف تانسور قطبش‌پذیری الکتریکی اتم:

$$\boldsymbol{\alpha}(\omega) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{2}{\hbar} \sum_k \frac{\omega_{k0}\mathbf{d}_{0k}\mathbf{d}_{k0}}{\omega_{k0}^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\omega\epsilon}, \quad ۲۸$$

(مرجع [۲۱] را ببینید) رابطهٔ۲۷ را می‌توانیم به‌صورت:

$$\Delta E_e^{(2)} = \frac{\hbar\mu_0}{2\pi} \int_0^\infty duu^2 \mathrm{tr}\left[\boldsymbol{\alpha}(iu) \cdot \mathbf{G}\left(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_A, iu\right)\right] \quad ۲۹$$

بنویسیم. انرژی پتانسیل پاشندگی، بخش وابسته به موقعیت از جابه‌جایی انرژی است که با جانشانی بخش پراکندگی تانسور گرین، $\mathbf{G}^S$، که به موضع نسبی اتم در قبال ناپیوستگی محیط مادی (مرزهای اجسام مغناطوالکتریک) بستگی دارد، به‌جای $\mathbf{G}$ حاصل می‌شود:

$$U_e(\mathbf{r}_A) = \frac{\hbar\mu_0}{2\pi} \int_0^\infty duu^2 \mathrm{tr}\left[\boldsymbol{\alpha}(iu) \cdot \mathbf{G}^S\left(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_A, iu\right)\right] \quad ۳۰$$

این رابطه شبیه به‌رابطهٔ متناظر برای سیستمی مشابه، امّا با پاسخ موضعی است [۳۵].

پتانسیل پاشندگی یک اتم مغناطیسی حالت پایه در محیط غیرموضعی

در این حالت نیز مانند مورد اتم الکتریکی، اولین مرتبهٔ غیرصفر جابه‌جایی انرژی، از مرتبهٔ دوم اختلال حاصل می‌شود، با این تفاوت که به‌جای هامیلتونی

اختلالی، تنها جملهٔ دوم از رابطهٔ۸ را در رابطهٔ۱۹ جایگزین کنیم. برای عنصر ماتریسی صورت کسر رابطهٔ۱۹، با به‌کارگیری رابطهٔ۱۰ برای میدان مغناطیسی، رابطهٔ جابه‌جایی۳، و تعریف۷ برای حالت تک‌فوتونی میدان نتیجه می‌گیریم:

$$\langle I|-\hat{\mathbf{m}}\cdot\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}_A)|0\rangle=-\mu_0\sqrt{\frac{\hbar\omega}{\pi}}\int d^3r' \times\left\{\mathbf{m}_{0k}\cdot\nabla_A\times\mathbf{G}(\mathbf{r}_A,\mathbf{r}',\omega)\cdot\mathbf{K}(\mathbf{r}',\mathbf{r},\omega)\right\} \quad ۳۱$$

با قراردادن این عنصر ماتریسی و مزدوج هرمیتی‌اش در رابطهٔ۱۹، و مشابه با محاسبات مربوط به اتم الکتریکی، با گرفتن انتگرال‌های فضا با استفاده از روابط انتگرالی ۱۴ و ۱۵، به‌رابطهٔ:

$$\Delta E_m^{(2)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_0}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{d\omega}{\omega_{k0}+\omega} \times\left[\mathbf{m}_{0k}\cdot\nabla_A\times\mathrm{Im}\mathbf{G}(\mathbf{r}_A,\mathbf{r},\omega)\times\overleftarrow{\nabla}\cdot\mathbf{m}_{k0}\right]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_A} \quad ۳۲$$

برای جابه‌جایی مرتبهٔ دوم انرژی می‌رسیم که در آن $\mathbf{m}_{0k}={}_A\langle 0|\hat{\mathbf{m}}|k\rangle_A$. در ضمن، در رابطهٔ۳۲، نماد $\overleftarrow{\nabla}$ را معرفی کرده‌ایم که مشابه عملگر دیفرانسیلی ∇ است با این تفاوت که بر عبارت سمت چپ خود اثر می‌کند و عمل آن بر یک بردار $\boldsymbol{a}$ و یا یک تانسور $\boldsymbol{T}$ به‌صورت:

$$\boldsymbol{a}\times\overleftarrow{\nabla}=-\nabla\times\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{T}\times\overleftarrow{\nabla}=-(\nabla\times\boldsymbol{T}^{\top})^{\top},$$

تعریف می‌شود.

اکنون نیز عناصر ماتریسی گشتاور دوقطبی مغناطیسی را حقیقی در نظر می‌گیریم. بنابراین:

$$\Delta E_m^{(2)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_0}{\pi}\mathrm{Im}\int_0^{\infty}\frac{d\omega}{\omega_{k0}+\omega} \times\left[\mathbf{m}_{0k}\cdot\nabla_A\times\mathbf{G}(\mathbf{r}_A,\mathbf{r},\omega)\times\overleftarrow{\nabla}\cdot\mathbf{m}_{k0}\right]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_A} \quad ۳۳$$

برای حل این انتگرال، مانند آنچه که ما را به رابطهٔ۲۹ رساند عمل می‌کنیم. در نتیجه:

$$U_m(\mathbf{r}_A)=\frac{\hbar\mu_0}{2\pi}\int_0^{\infty}du \times tr\left\{\boldsymbol{\beta}(iu)\cdot\left[\nabla_A\times\mathbf{G}^S(\mathbf{r}_A,\mathbf{r},iu)\times\overleftarrow{\nabla}\right]\mathbf{r}=\mathbf{r}_A\right\} \quad ۳۴$$

که در آن $\boldsymbol{\beta}(iu)$ تانسور قطبش‌پذیری مغناطیسی اتم است که به‌صورت:

$$\boldsymbol{\beta}(\omega)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2}{\hbar}\sum_k\frac{\omega_{k0}\mathbf{m}_{0k}\mathbf{m}_{k0}}{\omega_{k0}{}^2-\omega^2-i\omega\varepsilon} \quad ۳۵$$

تعریف می‌شود. رابطهٔ۳۴ شبیه به‌رابطهٔ متناظر در محیط‌های موضعی است [۳۵].

نتیجه‌گیری

بر خلاف انتظار با توجه به فرمول‌بندی متفاوت محیط‌های موضعی با محیط‌های غیرموضعی، روابط۱۱-۹ با روابط متناظر در محیط موضعی (مرجع‌های [۳۴] و [۳۵]) روابط نهایی به‌دست آمده برای پتانسیل پاشندگی یک اتم الکتریکی و مغناطیسی حالت پایه در حضور مواد مغناطوالکتریک اتلافی با پاسخ غیرموضعی کاملاً مشابه با روابط متناظر در محیط موضعی ([۳۴] و [۳۵]) هستند. البته این شباهت ظاهری است. زیرا تمامی خواص هندسی و الکترومغناطیسی محیط در تانسور گرین نهفته است که برای دو نوع محیط موضعی و غیرموضعی به‌هیچ‌وجه یکسان نخواهد بود. بنابراین از آنجا که روابط نهایی برای پتانسیل پاشندگی به تانسور گرین محیط بستگی دارد شباهت به‌دست آمده تنها جنبه ظاهری دارد. لازم به‌ذکر است که می‌توان نیروی کازیمیر-پولدر سیستم‌های معرفی شده را نیز از رابطهٔ $\mathbf{F}(\mathbf{r}_A)=-\nabla_A U(\mathbf{r}_A)$

به‌دست آورد. به‌دلیل وابستگی نیروی کازیمیر–پولدر به تانسور گرین محیط مادی، برای سیستم‌هایی با هندسهٔ مشابه امّا با نوع پاسخ متفاوت از حیث موضعی یا غیرموضعی، قطعاً نتایج متفاوتی برای نیروی پاشندگی نتیجه خواهد شد.

مرجع‌ها

[1] J.E. Lennard-Jones, Processes of Absorption and Diffusion on Solid Surfaces, *Transactions of the Faraday Society* ***28*** (1932) 333. https://doi.org/10.1039/TF9322800333

[2] H.B.G. Casimir, D. Polder, The Influence of Radiation on the London- Van der Waals forces, *Physical Review* ***73*** (1948) 360. https://doi.org/10.1103/PhysRev.73.360

[3] H.B.G. Casimir, On the Attraction of Two Perfectly Conducting Plates. *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie* ***51*** (1948) 793.

[4] F. Armata, R. Vasile, P. Barcellona, S.Y. Buhmann, Dynamical Casimir-Polder force between an excited atom and a conducting wall, *Physical Review A* ***94*** (2016) 042511. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.94.042511

[5] P. Thiyam, P. Parashar, K.V. Shajesh, C. Persson, M. Schaden, I. Brevik, D.F. Parsons, K.A. Milton, O.I. Malyi, M. Boström, Anisotropic contribution to the van der Waals and the Casimir-Polder energies for CO_2 and CH_4 molecules near surfaces and thin films. *Physical Review A* ***92*** (2015) 052704. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.92.052704

[6] G.L. Klimchitskaya, V.M. Mostepanenko, Classical Casimir-Polder force between polarizable microparticles and thin films including grapheme, *Physical Review A* ***89*** (2014) 012516. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.89.012516

[7] S. Scheel, S.Y. Buhmann, C. Clausen, P. Schneeweiss, Directional spontaneous emission and lateral Casimir-Polder force on an atom close to a nanofiber, *Physical Review A* ***92*** (2015) 043819.

[8] A.M. Alhambra, A. Kempf, E. Martin-Martinez, Casimir forces on atoms in optical cavities, *Physical Review A* ***89*** (2014) 033835. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.92.043819

[9] S.Y. Buhmann, V.N. Marachevsky, S. Scheel, Charge–Parity violating effects in Casimir–Polder potentials, *Physical Review A* ***98*** (2018) 022510. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.98.022510

[10] P. Barcellona, R. Passante, L. Rizzuto, S.Y. Buhmann, Dynamical Casimir-Polder interaction between a chiral molecule and a surface, *Physical Review A* ***93*** (2015) 032508. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.93.032508

[11] A. Manjavacas, F.J. Rodriguez-Fortuno, F.J. Garcia de Abajo, A.V. Zayats, Lateral Casimir force on a rotating particle near a planar surface. *Physical Review Letters* ***118*** (2016) 133605. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.133605

[12] S. Fuchs, R. Bennett, S.Y. Buhmann, Casimir–Polder Potential of a Driven Atom, *Physical Review A* ***98*** (2018) 022514. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.98.022514

[13] K.A. Milton, E.K. Abalo, P. Parashar, N. Pourtolami, I. Brevik, S.A. Ellingsen, S.Y. Buhmann, S. Scheel, Casimir-Polder repulsion: Three-body effects, *Physical Review A* ***91*** (2015) 042510. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.91.042510

[14] G. Feinberg, J. Sucher, General Form of the Retarded Van der Waals Potential, *Journal of Chemical Physics* ***48*** (1968) 3333. https://doi.org/10.1063/1.1669611

[15] T.H. Boyer, Recalculations of Long-Range van der Waals Potentials, *Physical Review* ***180*** (1969) 19.

[16] G. Feinberg, J. Sucher, General Theory of the van der Waals Interaction: A Model-Independent Approach, *Physical Review A* ***2*** (1970) 2395. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.2.2395

[17] C. Mavroyannis, The interaction of neutral molecules with dielectric surfaces, *Molecular Physics* ***6*** (1963) 593. https://doi.org/10.1080/00268976300100691

Optical Physics ***52*** (2019) 8. https://doi.org/10.1088/1361-6455/aaf6d7

[28] L. Rizzuto, R. Passante, F. Persico, Dynamical Casimir-Polder Energy Between an Excited and a Ground-State Atom, *Physical Review A* ***70*** (2004) 012107. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.70.012107

[29] E.A. Power, T. Thirunamachandran, Dispersion Forces between Molecules with One or Two Molecules Excited, *Physical Review A* ***51*** (1995) 3660. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.51.3660

[30] Y. Sherkunov, Van der Waals Interaction of Excited Media, *Physical Review A* ***72*** (2005) 052703. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.72.052703

[31] H. Safari, M.R. Karimpour, Body-Assisted van der Waals Interaction between Excited Atoms *Physical Review Letters* ***114*** (2014) 013201. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.013201

[32] M. Donaire, R. Guerout, A. Lambrecht, Quasi-resonant van der Waals interaction between non-identical atoms, *Physical Review Letters* ***115*** (2015) 033201. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.033201

[33] C. Raabe, S. Scheel, D.-G. Welsch, Unified Approach to QED in Arbitrary Linear Media, *Physical Review A* ***75*** (2007) 053813. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.75.053813

[34] S.Y. Buhmann, L. Knoll, D.-G. Welsch, H.T. Dung, Casimir-Polder forces: A nonperturbative approach *Physical Review A* ***70*** (2004) 052117.

https://doi.org/10.1103/PhysRevA.70.052117

[35] L. Knöll, S. Scheel, D.-G. Welsch, *QED in Dispersing and Absorbing Media,* Wiley, New York (2001).

[18] A.D. McLachlan, Van der Waals Forces Between an Atom and a Surface. *Molecular Physics* ***7*** (1964) 381. https://doi.org/10.1080/00268976300101141

[19] M.S. Tomaš, Vacuum Force on an Atom in a Magnetodielectric Cavity, *Physical Review A* ***72*** (2005) 034104. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.72.034104

[20] M.S. Tomaš, Medium-Modified Casimir Forces, *Journal of Physics A: Mathematical and General* ***39*** (2006) 6785. https://doi.org/10.1088/0305-4470/39/21/S80

[21] S.Y. Buhmann, H. Safari, S. Scheel, A. Salam, Body-assisted dispersion potentials of diamagnetic atoms, *Physical Review A* ***87*** (2013) 012507. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.87.012507

[22] P. Barcellona, H. Safari, A. Salam, S.Y. Buhmann, Enhanced chiral discriminatory van der Waals interactions mediated by chiral surfaces, *Physical Review Letters* ***118*** (2017) 193401. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.193401

[23] S. Esfandiarpour, R. Bennett, H. Safari, S.Y. Buhmann, Cavity-QED interactions of two correlated atoms, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* ***51*** (2017) 9. https://doi.org/10.1088/1361-6455/aaae41

[24] T. Emig, N. Graham, R.L. Jaffe, M. Kardar, Casimir Forces between Arbitrary Compact Objects. *Physical Review Letters* ***99*** (2007) 170403. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.99.170403

[25] T.L. Ferrell, R.H. Ritchie, Dynamical and Geometrical Effects on the Physisorption of Atoms, *Physical Review A* ***21*** (1980) 1305. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.21.1305

[26] Y.C. Cheng, J.S. Yang, Enhancement of the van der Waals Energy between an Atom and a Cylindrical Surface: Application to the Edges of Stepped Surfaces, *Physical Review B* ***41*** (1990) 1196. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.41.1196

[27] S. Esfandiarpour, H. Safari, S.Y. Buhmann, Cavity-QED interactions of several atoms, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and*