Document Type: Full length research Paper

Lagrangian reformulation of Maxwell electrostatics based on a one-parameter extension of the Heisenberg algebra in a six-dimensional phasespace

Saeed Nabipour, Seyed Kamran Moayedi*

Department of Physics, Faculty of Basic Sciences, Arak University, Arak 38156-8-8349, Iran

Received: 27.06.2021 Final revised: 25.12.2022 Accepted: 06.02.2023

Doi link: 10.22055/jrmbs.2023.18126

Abstract

In a series of papers, Frydryszak and Tkachuk (Czechoslovak Journal of Physics, **53** (2003) 1035-1040; Foundations of Physics, **46** (2016) 1666-1679) introduced a one-parameter extension of the Heisenberg algebra with a deformation parameter β in a six-dimensional phase space. In this paper, after Lagrangian reformulation of Maxwell electrostatics from the viewpoint of the above one-parameter extension of the Heisenberg algebra in a six-dimensional phase space the electrostatic potential and the electric field of a point charge are calculated analytically in this generalized electrostatics (generalized Maxwell electrostatics). We show that in contrast with the conventional Maxwell electrostatics the electrostatic potential and the electric field of a point charge are not singular at the position of the point charge in this generalized electrostatics. We show that in the low-energy limit (large spatial distances), the results of this generalized electrostatics are compatible with the results of the conventional Maxwell electrostatics.

Keywords: Phase space, Heisenberg algebra, Deformation, Maxwell electrostatics, Lagrangian formulation, Point charge

*Corresponding Author: s-moayedi@araku.ac.ir

بازفرمول‌بندی لاگرانژی الکتروستاتیک ماکسول بر اساس یک توسیع تک پارامتری از جبر هایزنبرگ در یک فضای فاز شش بعدی

سعید نبی‌پور، سید کامران مویدی*

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه اراک، اراک، کد پستی۸۳۴۹-۸-۳۸۱۵۶، ایران

دریافت: ۱۴۰۰/۰۴/۰۶ ویرایش نهائی: ۱۴۰۱/۱۰/۰۴ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۱/۱۷

Doi link: 10.22055/jrmbs.2023.18126

چکیده

در یک مجموعه از مقالات (Czechoslovak Journal of Physics, **53** (2003) 1035-1040; Found. Phys, **46** (2016) 1666-1679) فریدریشاک به‌همراه تکاچوک یک توسیع تک پارامتری با پارامتر دگرگونش β را از جبر استاندارد هایزنبرگ در یک فضای فاز شش بعدی ارائه دادند. در این مقاله، ما به بازفرمول‌بندی لاگرانژی نظریۀ الکتروستاتیک ماکسول در یک فضای فاز شش بعدی از منظر جبر هایزنبرگ تعمیم یافته معرفی شده توسط این نویسندگان می‌پردازیم. بعد از به‌دست آوردن شکل دقیق پتانسیل الکتروستاتیکی و میدان الکتریکی وابسته به یک بار نقطه‌ای ایستا در این الکتروستاتیک تعمیم یافته (الکتروستاتیک ماکسول تعمیم یافته) نشان می‌دهیم که مقدار این عبارت‌ها در مکان قرار گرفتن بار نقطه‌ای برخلاف نظریۀ ماکسول مقادیری متناهی به‌دست می‌آیند. نشان می‌دهیم که تمامی نتایج به‌دست آمده برای الکتروستاتیک ماکسول تعمیم یافته در حد انرژی‌های پایین (فواصل فضایی بزرگ) با نتایج به‌دست آمده از الکتروستاتیک ماکسول سازگار هستند.

کلیدواژگان: فضای فاز، جبر هایزنبرگ، دگرگونش، الکتروستاتیک ماکسول، فرمول‌بندی لاگرانژی، بار نقطه‌ای

مقدمه

الکترودینامیک ماکسول یک نظریۀ میدان کلاسیک است که بر پایۀ چهار معادلۀ اساسی که در سال ۱۸۶۴ میلادی توسط فیزیک‌دان بریتانیایی جیمز کلارک ماکسول[1] ارائه گردیدند بنا نهاده شده است. نظریۀ الکترودینامیک کلاسیک ماکسول قادر به توصیف گسترۀ وسیعی از پدیده‌های الکترومغناطیسی نظیر انتشار نور در محیط‌های ناهمگن که در آن ضریب شکست تابعی از مکان در نظر گرفته می‌شود [۱] و نیز انتشار امواج الکترومغناطیسی در درون موجبرها [۲و۳] می‌باشد. اگرچه نظریۀ الکترودینامیک ماکسول در مقیاس ماکروسکوپیک توصیفی سازگار از برهم‌کنش‌های الکترومغناطیسی ارائه می‌دهد اما در هنگام مطالعۀ پدیده‌های الکترومغناطیسی در مقیاس‌های طولی بسیار کوچک که اثرات کوآنتومی اهمیت پیدا می‌کنند نظریۀ ماکسول مبتلا به معضلاتی نظیر پیدایش واگرایی‌های فرابنفش[2] می‌گردد [۴و۵]. از جمله ایرادات وارد دیگر بر نظریۀ ماکسول آن است که میدان الکتریکی وابسته به یک بار نقطه‌ای q در مکان قرار گرفتن بار تکین است، یعنی:

*نویسنده مسئول: s-moayedi@araku.ac.ir

[1] James Clerk Maxwell
[2] Ultraviolet divergences

$$\vec{E}\left(\vec{x}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{x}\right|^2}\frac{\vec{x}}{\left|\vec{x}\right|}\xrightarrow{|\vec{x}|\to 0}\infty. \qquad ۱$$

همچنین در الکترودینامیک ماکسول خود-انرژی[۱] کلاسیک وابسته به یک بار نقطه‌ای مقداری نامتناهی به‌دست می‌آید:

$$U=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{d\left|\vec{x}\right|}{\left|\vec{x}\right|^2}\to\infty. \qquad ۲$$

وجود این معادلات باعث گردید که در سال ۱۹۳۴ میلادی فیزیک‌دان آلمانی ماکس بورن[۲] همراه با دستیارش لئوپولد اینفلد[۳] تعمیمی غیرخطی از نظریهٔ الکترودینامیک ماکسول ارائه کنند که در آن مقدار خود-انرژی کلاسیک برای بارهای نقطه‌ای برخلاف نظریهٔ ماکسول مقداری متناهی به‌دست می‌آمد [۶و۷]. در سال ۱۹۴۰ میلادی فیزیک‌دان آلمانی فریتس باپ[۴] و دو سال بعد در سال ۱۹۴۲ میلادی بوریس پودولسکی[۵] فیزیک‌دان روس‌تبار ساکن آمریکا با افزودن جمله‌ای شامل مشتق مرتبهٔ دوم میدان پیمانه‌ای A_μ به لاگرانژی ماکسول به یک نظریهٔ الکترودینامیک خطی با مشتقات مرتبهٔ بالاتر دست یافتند که در این نظریه همانند نظریهٔ الکترودینامیک غیرخطی بورن-اینفلد مقدار خود-انرژی کلاسیک یک بار نقطه‌ای مقداری متناهی به‌دست می‌آمد [۸و۹]. در سال ۱۹۵۰ میلادی آبراهام پایس[۶] همراه با جورج اولنبک[۷] نشان دادند که می‌توان با افزودن جملات دربرگیرندهٔ مشتقات مراتب بالاتر میدان به لاگرانژی توصیف‌کنندهٔ یک مدل فیزیکی همانند آنچه توسط باپ و پودولسکی در مراجع [۸و۹] انجام گردید به یک نظریهٔ میدان کوآنتومی عاری از تکینگی دست یافت [۱۰]. همزمان با تلاش‌های صورت گرفته توسط فیزیک‌دانان نظری دست‌اندرکار نظریهٔ میدان به‌منظور دست‌یابی به‌یک نظریهٔ میدان کوآنتومی فاقد تکینگی، در سال ۱۹۴۷ میلادی یک فیزیک‌دان آمریکایی به نام اشنایدر[۸] کوشید تا با بازفرمول‌بندی نظریهٔ میدان کوآنتومی در یک فضا-زمان چهار بعدی با فرض وجود یک مقیاس طول بنیادین در ساختار فضا-زمان امکان حذف تکینگی‌های به‌وجود آمده در فواصل فضایی بسیار کوچک در نظریهٔ میدان را مورد بررسی قرار دهد[۱۱]. امروزه بازفرمول‌بندی مکانیک کوآنتومی و نظریهٔ میدان بر اساس روابط جابه‌جایی تعمیم یافته میان عمل‌گرهای مکان وتکانه به‌صورت گسترده‌ای در کانون توجه فیزیک‌دانان نظری قرار گرفته‌اند [۱۹-۱۲]. در بعضی از این روابط جابه‌جایی تعمیم یافته میان عمل‌گرهای مکان وتکانه وجود یک مقیاس طول بنیادین در اندازه‌گیری بازه‌های فضایی پیش‌بینی می‌گردد که این پیش‌بینی با اغلب مدل‌های گرانش کوآنتومی که وجود یک مقیاس طول بنیادی از مرتبهٔ بزرگی طول پلانک، یعنی $\ell_P=\sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}\approx 1.6\times 10^{-35}\,m$ در آن‌ها پیش‌گویی می‌گردد سازگار است. در مرجع [۲۰] نویسندگان نشان داده‌اند که برش‌های فروسرخ و فرابنفش[۹] می‌توانند از دگرگونش سرتاسری دستگاه‌های هامیلتونی توصیف کنندهٔ یک مدل فیزیکی بر روی خمینه‌های همتافته فشرده[۱۰] به‌وجود آیند. بنا به آنچه گفته شد برش‌های طبیعی موجود در نظریهٔ گرانش کوآنتومی را می‌توان ناشی از خواص سرتاسری (توپولوژیک) خمینه‌های همتافته‌ای دانست که نظریه بر روی آن خمینه‌ها تعریف شده است [۲۰]. در اینجا ما

[1] Self-energy
[2] Max Born
[3] Leopold Infeld
[4] Fritz Bopp
[5] Boris Podolsky
[6] Abraham Pais
[7] George Uhlenbeck
[8] H.S. Snyder
[9] IR and UV cutoffs
[10] Compact symplectic manifolds

خوانندهٔ علاقه‌مند را برای مطالعهٔ شرح مبسوطی از این دیدگاه هندسی پیرامون مبحث پدیده‌شناسی در گرانش کوآنتومی به مرجع [۲۰] ارجاع می‌دهیم. در فقدان وجود یک نظریهٔ کامل برای گرانش کوآنتومی وجود این برش‌های طبیعی می‌توانند به‌صورت یک رابطهٔ عدم قطعیت تعمیم یافته میان مکان با تکانهٔ ذره و یا به‌صورت یک دگرگونش از جبر هایزنبرگ بر روی یک فضای فاز کوآنتومی نمود پیدا کنند [۲۱]. انتظار می‌رود که وجود چنین برش‌های طبیعی در نظریهٔ گرانش کوآنتومی بتوانند منجر به برطرف کردن یا حداقل تعدیل بخشی از واگرایی‌های موجود در این نظریه شوند [۲۱–۱۹]. در یک مجموعه از مقالات، فریدریشاک[1] به‌همراه تکاچوک[2] یک توسیع[3] تک پارامتری از جبر استاندارد هایزنبرگ در یک فضای فاز کوآنتومی شش بعدی ارائه کرده و سپس به بازفرمول‌بندی مکانیک کوآنتومی از منظر این جبر هایزنبرگ تعمیم یافته پرداختند [۱۷و۱۸]. در این مقاله ما با در نظر گرفتن نظریهٔ الکتروستاتیک ماکسول به‌صورت یک نظریهٔ میدان در چارچوب لاگرانژی، به بازفرمول‌بندی نظریهٔ الکتروستاتیک ماکسول در یک فضای دکارتی سه بعدی در چارچوب جبر هایزنبرگ تعمیم یافته می‌پردازیم. نشان می‌دهیم که معادلهٔ پواسون[4] وابسته به یک پیکربندی ایستا از بارهای الکتریکی در این مدل تعمیم یافته از الکتروستاتیک ماکسول یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی با مشتقات جزئی از مرتبهٔ بی‌نهایت می‌باشد. در ادامهٔ شکل دقیق پتانسیل الکتروستاتیکی وابسته به یک بار نقطه‌ای q که در مبدأ دستگاه مختصات دکارتی سه بعدی قرار دارد از منظر جبر هایزنبرگ تعمیم‌یافته به‌دست آمده و نشان داده می‌شود که مقدار این پتانسیل الکتروستاتیکی تعمیم یافته در مکان قرار گرفتن بار $\left(|\vec{x}| \to 0\right)$ برخلاف نظریهٔ ماکسول بی‌نهایت نبوده و دارای مقداری متناهی است. با استفاده از پتانسیل الکتروستاتیکی تعمیم یافته مربوط به یک بار نقطه‌ای واقع در مبدأ دستگاه مختصات دکارتی سه بعدی شکل بستهٔ میدان الکتریکی وابسته به یک بار نقطه‌ای q در مبدأ از منظر جبر هایزنبرگ تعمیم یافته به‌صورت تحلیلی محاسبه می‌گردد. میدان الکتریکی تعمیم یافتهٔ مربوط به بار نقطه‌ای همانند میدان الکتریکی وابسته به بار نقطه‌ای در الکتروستاتیک ماکسول دارای تقارن کروی است، با این تفاوت که مقدار میدان الکتریکی تعمیم یافته در نقاط بسیار نزدیک به بار نقطه‌ای $\left(|\vec{x}| \to 0\right)$ برخلاف نظریهٔ ماکسول رفتاری منظم داشته و دارای مقداری متناهی است. در بخش نتیجه‌گیری این مقاله نشان می‌دهیم که تمامی روابط به‌دست آمده برای الکتروستاتیک ماکسول در چارچوب جبر هایزنبرگ تعمیم یافته در رژیم انرژی‌های پایین که متناظر با فواصل فضایی بزرگ هستند به نتایج مربوط به الکتروستاتیک ماکسول معمولی تبدیل می‌شوند. این مقاله دربرگیرندهٔ دو پیوست الف و ب می‌باشد. در **پیوست الف** ما به مقایسهٔ میان کارهای انجام شده در این مقاله با کارهای صورت گرفته در مرجع [۱۲] خواهیم پرداخت. **پیوست ب** به ارائهٔ یک فرمول بندی هموردا از نظریهٔ ماکسول در حضور یک برش تکانه و بررسی تقارن پیمانه‌ای این نظریه در یک فضا–زمان چهار بعدی اختصاص خواهد داشت.

---
[1] Frydryszak
[2] Tkachuk
[3] Extension
[4] Poisson

توسیع تک پارامتری جبر هایزنبرگ در یک فضای فاز کوآنتومی شش بعدی

اگر $x^i=\left(x^1,x^2,x^3\right)$ مؤلفه‌های عمل‌گر مکان و $p^i=\left(p^1,p^2,p^3\right)$ مؤلفه‌های عمل‌گر تکانه در یک فضای فاز کوآنتومی شش بعدی متعارف باشند خواهیم داشت:

۳ $$\left[x^i,x^j\right]=0,$$

۴ $$\left[p^i,p^j\right]=0,$$

۵ $$\left[x^i,p^j\right]=i\hbar\delta^{ij},\quad \forall i,j\in\{1,2,3\}.$$

روابط ۳ تا ۵ تعریف کنندهٔ جبر هایزنبرگ در یک فضای دکارتی سه بعدی (فضای فاز شش بعدی) می‌باشند. در یک مجموعه از مقالات، فریدریشاک به‌همراه تکاچوک یک توسیع تک پارامتری از جبر هایزنبرگ در یک فضای فاز کوآنتومی شش بعدی دگرگون شده ارائه کردند [۱۷و۱۸]. این جبر هایزنبرگ دگرگون شده که ما آن را جبر هایزنبرگ تعمیم یافته می‌نامیم توسط روابط جابه‌جایی تعمیم یافتهٔ زیر معرفی می‌گردند [۱۸]:

۶ $$\left[X^i,X^j\right]=0,$$

۷ $$\left[P^i,P^j\right]=0,$$

۸ $$\left[X^i,P^j\right]=i\hbar\sqrt{1+\beta P^2}\left(\delta^{ij}+\beta P^iP^j\right),\quad \forall i,j\in\{1,2,3\},$$

که $X^i=\left(X^1,X^2,X^3\right)$ و $P^i=\left(P^1,P^2,P^3\right)$ به‌ترتیب مؤلفه‌های عمل‌گر مکان و تکانه در فضای فاز کوآنتومی شش بعدی دگرگون شده بوده و $P=\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\left(P^i\right)^2}$ طول بردار تکانه در این فضا است. همچنین β یک پارامتر ثابت نامنفی با دیمانسیون $\left[momentum\right]^{-2}$ است [۱۸]. در مرجع [۱۸] تکاچوک نشان داده است که عمل‌گرهای مکان X^i و تکانهٔ P^i در جبر هایزنبرگ تعمیم یافته، یعنی روابط جابه‌جایی ۶ تا ۸ دارای نمایش مختصاتی دقیقی به‌صورت زیر می‌باشند

۹ $$X^i=x^i,$$

۱۰ $$P^i=\frac{1}{\sqrt{1-\beta p^2}}p^i,\qquad \forall i\in\{1,2,3\},$$

که $p=\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\left(p^i\right)^2}$ طول بردار تکانه در فضای فاز معمولی $\left(x^i,p^i\right)$ است. برای حقیقی بودن P^i در رابطهٔ ۱۰ لازم است تا شرط زیر برقرار باشد:

۱۱ $$p<\frac{1}{\sqrt{\beta}}.$$

بنا به‌رابطهٔ ۱۰ ارتباط میان P (طول بردار تکانه در فضای فاز دگرگون شده) با p (طول بردار تکانه در فضای فاز غیر دگرگون شده) به‌شکل زیر است:

۱۲ $$P=\frac{1}{\sqrt{1-\beta p^2}}p.$$

رابطهٔ۱۲ به‌وضوح نشان می‌دهد که بازهٔ $\left[0,\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)$ برای p متناظر با بازهٔ $\left[0,+\infty\right)$ برای P می‌باشد. بنابراین در جبر هایزنبرگ تعمیم یافته p دارای مقدار بیشینه‌ای برابر با:

۱۳ $$p_{\max}=\frac{1}{\sqrt{\beta}},$$

است. رابطهٔ۱۳ به‌معنای وجود یک برش تکانه[1] بر روی p طول بردار تکانه در فضای فاز $\left(x^i,p^i\right)$ است. رابطهٔ ۱۰ نشان می‌دهد در جبر هایزنبرگ تعمیم یافته یک مقیاس طول مشخصه[2] به‌صورت:

۱۴ $$\left(\Delta x\right)_0:=\hbar\sqrt{\beta},$$

[1] Momentum cutoff

[2] Characteristic length scale

وجود دارد که در حد $\left(\Delta x\right)_0 \to 0$ جبر هایزنبرگ تعمیم یافته به جبر استاندارد هایزنبرگ (روابط ۳ تا ۵) تبدیل می‌شود. بنا به‌روابط۹و۱۰ در هنگام بازفرمول‌بندی یک نظریهٔ میدان از منظر جبر هایزنبرگ تعمیم یافته لازم است تا عمل‌گرهای مکان و مشتق استاندارد، یعنی $\left(x^i, \partial_i\right)$ بر طبق دستورالعمل زیر با عمل‌گرهای مکان و مشتق تعمیم یافتهٔ $\left(X^i, D_i\right)$ جایگزین شوند:

$$x^i \to X^i = x^i, \qquad ۱۵$$

$$\partial_i \to D_i := \frac{1}{\sqrt{1+\left(\Delta x\right)_0^2 \nabla^2}}\partial_i, \quad \forall i \in \{1,2,3\}, \qquad ۱۶$$

که $\nabla^2 = \sum_{i=1}^{3}\partial_i \partial_i$ عمل‌گر لاپلاس در فضای دکارتی سه بعدی است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود در حد $\left(\Delta x\right)_0 \to 0$ مشتق تعمیم یافتهٔ D_i در رابطهٔ۱۶ به مشتق معمولی ∂_i تبدیل می‌شود.

بازفرمول‌بندی الکتروستاتیک ماکسول در حضور یک چشمهٔ خارجی از منظر جبر هایزنبرگ تعمیم یافته

در این بخش فرمول‌بندی لاگرانژی الکتروستاتیک ماکسول در حضور یک چشمهٔ خارجی را در یک فضای دکارتی سه بعدی از دیدگاه جبر هایزنبرگ تعمیم یافته مورد مطالعه قرار می‌دهیم. چگالی لاگرانژی برای پتانسیل الکتروستاتیکی $\phi\left(\vec{x}\right)$ در حضور چشمهٔ خارجی $\rho\left(\vec{x}\right)$ در یک فضای دکارتی سه بعدی به‌صورت زیر است [۱۲]:

$$\mathcal{L}\left(\phi, \partial_i \phi\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\partial_i \phi\right)\left(\partial_i \phi\right) - \rho\phi. \qquad ۱۷$$

معادلهٔ اویلر-لاگرانژ وابسته به پتانسیل الکتروستاتیکی $\phi\left(\vec{x}\right)$ به‌شکل زیر است:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_j \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_j \phi\right)}\right) = 0. \qquad ۱۸$$

اگر چگالی لاگرانژی۱۷ را در رابطهٔ۱۸ قرار دهیم معادلهٔ میدان زیر برای پتانسیل الکتروستاتیکی $\phi\left(\vec{x}\right)$ به‌دست می‌آید:

$$\nabla^2 \phi\left(\vec{x}\right) = -\frac{\rho\left(\vec{x}\right)}{\varepsilon_0}. \qquad ۱۹$$

معادلهٔ۱۹ همان معادلهٔ پواسون در الکتروستاتیک ماکسول می‌باشد. معادلهٔ پواسون۱۹ با دو معادلهٔ زیر هم‌ارز است:

$$\nabla . \vec{E}\left(\vec{x}\right) = \frac{\rho\left(\vec{x}\right)}{\varepsilon_0}, \qquad ۲۰$$

$$\nabla \times \vec{E}\left(\vec{x}\right) = 0, \qquad ۲۱$$

که $\vec{E}\left(\vec{x}\right) = -\nabla \phi\left(\vec{x}\right)$ میدان الکتروستاتیکی است. تحت اثر تبدیل مختصاتی به‌شکل رابطهٔ۱۵ پتانسیل الکتروستاتیکی $\phi\left(\vec{x}\right)$ و چگالی بار الکتریکی $\rho\left(\vec{x}\right)$ به‌صورت زیر تبدیل پیدا می‌کنند:

$$\phi\left(\vec{x}\right) \to \Phi\left(\vec{X}\right) = \phi\left(\vec{x}\right), \qquad ۲۲$$

$$\rho\left(\vec{x}\right) \to \rho\left(\vec{X}\right) = \rho\left(\vec{x}\right). \qquad ۲۳$$

با توجه به‌روابط۱۶، ۱۷، ۲۲ و ۲۳ چگالی لاگرانژی وابسته به الکتروستاتیک ماکسول در چارچوب جبر هایزنبرگ تعمیم یافته (روابط ۶ تا ۸) به‌شکل زیر در می‌آید:

$$\mathcal{L}\left(\Phi, D_i \Phi\right)=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(D_i \Phi\left(\vec{X}\right)\right)\left(D_i \Phi\left(\vec{X}\right)\right)-\rho\left(\vec{X}\right)\Phi\left(\vec{X}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\Delta x\right)_0^2\nabla^2}}\partial_i\phi\left(\vec{x}\right)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\Delta x\right)_0^2\nabla^2}}\partial_i\phi\left(\vec{x}\right)\right)$$
$$-\rho\left(\vec{x}\right)\phi\left(\vec{x}\right).$$

۲۴

با اندکی محاسبه می‌توان نشان داد که رابطهٔ۲۴ را می‌توان چنین نوشت:

$$\mathcal{L}=\underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\partial_i\phi\right)\left(\partial_i\phi\right)-\rho\phi}_{\text{ordinary Maxwell electrostatics}}$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\Delta x\right)_0^2\left(\partial_i\partial_j\phi\right)\left(\partial_i\partial_j\phi\right) \qquad ۲۵$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\Delta x\right)_0^4\left(\partial_i\nabla^2\phi\right)\left(\partial_i\nabla^2\phi\right)$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon_0\partial_j\Upsilon_j+O\left(\left(\Delta x\right)_0^6\right),$$

که

$$\Upsilon_j:=-\left(\Delta x\right)_0^2\left(\partial_i\phi\right)\left(\partial_i\partial_j\phi\right)$$
$$+\frac{3}{4}\left(\Delta x\right)_0^4\left[\left(\partial_i\phi\right)\left(\partial_j\nabla^2\partial_i\phi\right)-\left(\partial_i\partial_j\phi\right)\left(\partial_i\nabla^2\phi\right)\right].$$

۲۶

همان‌گونه که رابطهٔ۲۵ نشان می‌دهد الکتروستاتیک ماکسول بازفرمول‌بندی شده از منظر جبر هایزنبرگ تعمیم‌یافته یک نظریهٔ میدان با مشتق از مرتبهٔ بی‌نهایت است که در ناحیهٔ انرژی‌های پایین $\left(\left(\Delta x\right)_0\to 0\right)$ همان نظریهٔ الکتروستاتیک ماکسول معمولی در یک فضای دکارتی سه بعدی را باز تولید می‌کند. از سوی دیگر جملهٔ $\frac{1}{2}\varepsilon_0\partial_j\Upsilon_j$ در رابطهٔ۲۵ یک جملهٔ مشتق کامل[1] بوده و تأثیری در معادلات حرکت ندارد از این رو چگالی لاگرانژی معرفی شده در رابطهٔ۲۵ را می‌توان به‌شکل مؤثر زیر بازنویسی کرد:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\partial_i\phi\right)\left(\partial_i\phi\right)+\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\Delta x\right)_0^2\left(\partial_i\partial_j\phi\right)\left(\partial_i\partial_j\phi\right)$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\Delta x\right)_0^4\left(\partial_i\nabla^2\phi\right)\left(\partial_i\nabla^2\phi\right)-\rho\phi+O\left(\left(\Delta x\right)_0^6\right).$$

۲۷

اکنون معادلهٔ حرکت وابسته به چگالی لاگرانژی۲۷ را به‌دست می‌آوریم. در مرجع [۲۲] مولر[2] و زوئیباخ[3] نشان داده‌اند که اگر چگالی لاگرانژی توصیف کنندهٔ میدان ϕ دارای شکل کلی زیر باشد:

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}\left(\phi,\ \partial_{i_1}\phi,\ \partial_{i_1}\partial_{i_2}\phi,\partial_{i_1}\partial_{i_2}\partial_{i_3}\phi,\ \dots\right), \qquad ۲۸$$

معادلهٔ اویلر–لاگرانژ وابسته به میدان ϕ چنین خواهد شد:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}-\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{i_1}}\right)_{i_1}+\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{i_1 i_2}}\right)_{i_1 i_2}-\dots$$
$$+\left(-1\right)^k\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{i_1 i_2\cdots i_k}}\right)_{i_1 i_2\dots i_k}+\dots=0, \qquad ۲۹$$

که

$$\phi_{i_1 i_2\cdots i_k}:=\partial_{i_1}\partial_{i_2}\dots\partial_{i_k}\phi, \qquad ۳۰$$

$$\frac{\partial\phi_{i_1 i_2\cdots i_k}}{\partial\phi_{j_1 j_2\cdots j_k}}=\delta_{i_1}^{j_1}\,\delta_{i_2}^{j_2}\dots\delta_{i_k}^{j_k}. \qquad ۳۱$$

چگالی لاگرانژی۲۷ با استفاده از تعریف ۳۰ به‌شکل زیر قابل بازنویسی است:

۳۲

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\varepsilon_0\phi_i\phi_i+\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\Delta x\right)_0^2\phi_{ij}\phi_{ij}+$$
$$\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\Delta x\right)_0^4\phi_{ijj}\phi_{ikk}-\rho\phi+\mathrm{O}\left(\left(\Delta x\right)_0^6\right).$$

اگر چگالی لاگرانژی۳۲ را در معادلهٔ۲۹ قرار دهیم معادلهٔ میدان زیر که یک معادلهٔ پواسون با مشتق از مرتبهٔ

[1]Total derivative
[2]Moeller
[3]Zwiebach

بی‌نهایت است حاصل می‌گردد:

$$\nabla^2\phi(\vec{x})\underbrace{-(\Delta x)_0^{\,2}\,\nabla^2\nabla^2\phi(\vec{x})+(\Delta x)_0^{\,4}\,\nabla^2\nabla^2\nabla^2\phi(\vec{x})+O\left(\left((\Delta x)_0\right)^6\right)}_{high-energy\ (short-distance)\ corrections}$$
$$=-\frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0}.$$

۳۳

در حد $(\Delta x)_0 \to 0$ معادلهٔ۳۳ به‌همان معادلهٔ آشنای پواسون در الکتروستاتیک ماکسول استاندارد، یعنی معادلهٔ۱۹ تبدیل می‌شود. معادلهٔ۳۳ را می‌توان به‌شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\left[1-\left((\Delta x)_0^{\,2}\nabla^2\right)+\left((\Delta x)_0^{\,2}\nabla^2\right)^2-\ldots\right]\nabla^2\phi(\vec{x}) \quad ۳۴$$
$$=-\frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0}.$$

عبارت داخل کروشه در سمت چپ معادلهٔ۳۴ به‌عبارت $\frac{1}{1+(\Delta x)_0^{\,2}\nabla^2}$ همگرا بوده از این رو شکل بستهٔ معادلهٔ پواسون با مشتق از مرتبهٔ بی‌نهایت را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{\nabla^2}{1+(\Delta x)_0^{\,2}\nabla^2}\phi(\vec{x})=-\frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0}. \qquad ۳۵$$

حل دقیق معادلهٔ پواسون با مشتق از مرتبهٔ بی‌نهایت برای یک بار نقطه‌ای ایستا

چگالی بار الکتریکی وابسته به یک بار نقطه‌ای q در مبدأ دستگاه مختصات دکارتی سه بعدی به‌شکل زیر است:

$$\begin{aligned}\rho(\vec{x})&=q\,\delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3)\\&=q\,\delta^{(3)}(\vec{x}).\end{aligned} \qquad ۳۶$$

معادلهٔ پواسون با مشتق از مرتبهٔ بی‌نهایت ۳۵ برای چگالی بار الکتریکی معرفی شده در رابطهٔ۳۶ به‌شکل زیر است:

$$\frac{\nabla^2}{1+(\Delta x)_0^{\,2}\nabla^2}\phi(\vec{x})=-\frac{q}{\varepsilon_0}\,\delta^{(3)}(\vec{x}). \qquad ۳۷$$

برای حل معادلهٔ۳۷ از روش تبدیل فوریه بهره می‌جوییم. تابع دلتای دیراک در فضای سه بعدی در حضور برش تکانهٔ۱۳ دارای نمایش انتگرالی به‌صورت زیر است:

$$\delta^{(3)}(\vec{x})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{k\le\frac{1}{(\Delta x)_0}} d^3k\ e^{i\vec{k}.\vec{x}}. \qquad ۳۸$$

لازم به‌تذکر است که با توجه به‌رابطهٔ میان بردار تکانه $\vec{p}$ و بردار موج $\vec{k}$ در فضای فاز (x^i,p^i)، یعنی رابطهٔ $\vec{p}=\hbar\vec{k}$ شرط ۱۳ به نامساوی $k\le\frac{1}{(\Delta x)_0}$ $\left(k=\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(k^i)^2}\right)$ منجر می‌شود.

همچنین پتانسیل الکتروستاتیکی $\phi(\vec{x})$ در معادلهٔ۳۷ دارای نمایش فوریه‌ای به‌شکل زیر است:

$$\phi(\vec{x})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{k\le\frac{1}{(\Delta x)_0}} d^3k\ e^{i\vec{k}.\vec{x}}G(\vec{k}). \qquad ۳۹$$

اثر عمل‌گر $\frac{\nabla^2}{1+(\Delta x)_0^{\,2}\nabla^2}$ بر روی پتانسیل الکتروستاتیکی $\phi(\vec{x})$ در معادلهٔ۳۹ به‌شکل زیر است:

$$\frac{\nabla^2}{1+(\Delta x)_0^{\,2}\nabla^2}\phi(\vec{x})=$$
$$-\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{k\le\frac{1}{(\Delta x)_0}} d^3k\,\frac{k^2}{1-(\Delta x)_0^{\,2}k^2}e^{i\vec{k}.\vec{x}}G(\vec{k}).$$

۴۰

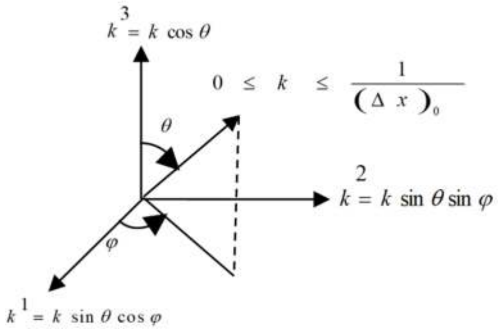
با توجه به‌روابط ۳۷، ۳۸ و ۴۰ شکل تابع $G(\vec{k})$ در معادلهٔ۳۹ خواهد شد:

$$G\left(\vec{k}\right)=\frac{q}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{k^2}-\left(\Delta x\right)_0^{\,2}\right). \qquad ۴۱$$

پس از قرار دادن رابطهٔ ۴۱ در رابطهٔ ۳۹ خواهیم داشت:

$$\phi\left(\vec{x}\right)=\frac{q}{\varepsilon_0}\frac{1}{\left(2\pi\right)^3} \int_{k\le\frac{1}{(\Delta x)_0}} d^3k\left(\frac{1}{k^2}-\left(\Delta x\right)_0^{\,2}\right)e^{i\vec{k}.\vec{x}}. \qquad ۴۲$$

با توجه به‌شکل۱ پتانسیل الکتروستاتیکی $\phi\left(\vec{x}\right)$ در رابطهٔ۴۲ را می‌توان چنین نوشت:



شکل۱. مختصات قطبی کروی $\left(k,\theta,\varphi\right)$ برای محاسبهٔ انتگرال ۴۲.

$$\phi\left(\vec{x}\right)=\frac{q}{\varepsilon_0}\frac{1}{\left(2\pi\right)^3}\int_0^{2\pi}d\varphi \int_0^{\frac{1}{(\Delta x)_0}}\left(1-\left(\Delta x\right)_0^{\,2}k^2\right)dk \int_0^{\pi}e^{ikr\cos\theta}\sin\theta\, d\theta. \qquad ۴۳$$

لازم به‌تذکر است که در نوشتن رابطهٔ۴۳ فرض کرده‌ایم که بردار مکان $\vec{x}$ $\left(\left|\vec{x}\right|=r\right)$ در راستای محور k^3 باشد، می‌توان نوشت:

$$\phi\left(\vec{x}\right)= \frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0 r}\left[\int_0^{\frac{1}{(\Delta x)_0}}\frac{\sin kr}{k}dk-\left(\Delta x\right)_0^{2}\int_0^{\frac{1}{(\Delta x)_0}}k\sin kr\,dk\right]$$
$$=\frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0 r}\left[Si\left(\frac{r}{(\Delta x)_0}\right)+\frac{(\Delta x)_0}{r}\cos\left(\frac{r}{(\Delta x)_0}\right)-\frac{(\Delta x)_0^{2}}{r^2}\sin\left(\frac{r}{(\Delta x)_0}\right)\right], \qquad ۴۴$$

که $Si\left(x\right)=\int_0^x\frac{\sin u}{u}du$ انتگرال سینوسی[1] است [۲۳]. رابطهٔ۴۴ شکل تحلیلی پتانسیل الکتروستاتیکی مربوط به یک بار نقطه‌ای ایستا در فضای دکارتی سه بعدی از منظر جبر هایزنبرگ تعمیم یافته بوده و کماکان دارای تقارن کروی است. اکنون به بررسی رفتار پتانسیل الکتروستاتیکی مربوط به یک بار نقطه‌ای ایستا در فضای دکارتی سه بعدی از منظر جبر هایزنبرگ تعمیم یافته به‌ازای $\left(\Delta x\right)_0\to 0$ (ناحیهٔ انرژی‌های پایین) می‌پردازیم. با توجه به رفتار مجانبی انتگرال سینوسی $Si\left(x\right)$ به‌ازای مقادیر $x\gg 1$ ، یعنی رابطهٔ [۲۳]

$$Si\left(x\right)\sim\frac{\pi}{2}-\frac{\sin x}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{3!}{x^3}+\frac{5!}{x^5}-\ldots\right) -\frac{\cos x}{x}\left(1-\frac{2!}{x^2}+\frac{4!}{x^4}-\ldots\right), \qquad ۴۵$$

رابطهٔ۴۴ را می‌توان چنین نوشت:

$$\phi\left(\vec{x}\right)=\frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0 r} \left[\frac{\pi}{2}-\frac{\sin\left(\frac{r}{(\Delta x)_0}\right)}{\left(\frac{r}{(\Delta x)_0}\right)}\left(\frac{(\Delta x)_0}{r}-\ldots\right)-\frac{\cos\left(\frac{r}{(\Delta x)_0}\right)}{\left(\frac{r}{(\Delta x)_0}\right)}\left(1-\ldots\right) +\frac{(\Delta x)_0}{r}\cos\left(\frac{r}{(\Delta x)_0}\right)-\frac{(\Delta x)_0^{2}}{r^2}\sin\left(\frac{r}{(\Delta x)_0}\right)\right]$$
$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[1-\frac{4}{\pi}\frac{(\Delta x)_0^{2}}{r^2}\sin\left(\frac{r}{(\Delta x)_0}\right)+\ldots\right] \sim\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}. \qquad ۴۶$$

رابطهٔ۴۶ به‌وضوح نشان می‌دهد که در حد $\left(\Delta x\right)_0\to 0$ نتایج حاصل از الکتروستاتیک ماکسول تعمیم یافته به نتایج حاصل از الکتروستاتیک استاندارد ماکسول تبدیل می‌شوند. از سوی دیگر می‌دانیم که

---
[1] Sine integral

پتانسیل الکتروستاتیکی وابسته به یک بار نقطه‌ای q در مکان قرار گرفتن بار نقطه‌ای $\left(x^1=x^2=x^3=0\right)$ در نظریهٔ ماکسول برابر بی‌نهایت است، یعنی:

$$\lim_{r\to 0}\phi\left(\vec{x}\right)=\lim_{r\to 0}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\to\infty. \qquad ۴۷$$

حال اجازه دهید تا به بررسی رفتار پتانسیل الکتروستاتیکی وابسته به یک بار نقطه‌ای ایستای q در مکان قرار گرفتن بار از منظر جبر هایزنبرگ تعمیم یافته بپردازیم. برای این منظور لازم است تا از رابطهٔ زیر استفاده کنیم [۲۳]:

$$Si\left(x\right)=x-\frac{x^3}{18}+\ldots,\qquad x\ll 1. \qquad ۴۸$$

بنا به‌رابطهٔ ۴۸ تابع $\phi\left(\vec{x}\right)$ در رابطهٔ ۴۴ برای مقادیر $\left|\vec{x}\right|=r\to 0$ رفتاری به‌شکل زیر خواهد داشت:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{x})=&\frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0 r}\left[\frac{r}{(\Delta x)_0}-\frac{1}{18}\frac{r^3}{(\Delta x)_0^3}+\ldots+\right.\\&\frac{(\Delta x)_0}{r}\left(1-\frac{1}{2}\frac{r^2}{(\Delta x)_0^2}+\frac{1}{24}\frac{r^4}{(\Delta x)_0^4}-\ldots\right)-\\&\left.\frac{(\Delta x)_0^2}{r^2}\left(\frac{r}{(\Delta x)_0}-\frac{1}{6}\frac{r^3}{(\Delta x)_0^3}+\frac{1}{120}\frac{r^5}{(\Delta x)_0^5}-\ldots\right)\right]\\=&\frac{q}{3\pi^2\varepsilon_0(\Delta x)_0}\left[1-\frac{1}{30}\frac{r^2}{(\Delta x)_0^2}+\ldots\right].\end{aligned} \qquad ۴۹$$

با توجه به‌رابطهٔ ۴۹ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\phi(0,0,0)=&\\&\lim_{r\to 0}\frac{q}{3\pi^2\varepsilon_0(\Delta x)_0}\left[1-\frac{1}{30}\frac{r^2}{(\Delta x)_0^2}+\ldots\right]\\&=\frac{q}{3\pi^2\varepsilon_0(\Delta x)_0}.\end{aligned} \qquad ۵۰$$

همان‌گونه که دیده می‌شود مقدار پتانسیل الکتروستاتیکی وابسته به یک بار نقطه‌ای q در مکان قرار گرفتن بار نقطه‌ای در الکتروستاتیک ماکسول تعمیم یافته برخلاف الکتروستاتیک ماکسول مقداری متناهی به‌دست می‌آید. در واقع وجود مقیاس طول مشخصهٔ $\left(\Delta x\right)_0$ مانع از بی‌نهایت شدن پتانسیل بار نقطه‌ای q در فواصل فضایی بسیار نزدیک به بار نقطه‌ای q می‌گردد.

محاسبهٔ شکل دقیق میدان الکتریکی وابسته به یک بار نقطه‌ای ایستا در الکتروستاتیک ماکسول تعمیم یافته

مؤلفه‌های میدان الکتریکی در فضای فاز شش بعدی $\left(x^i,p^i\right)$ برای یک پیکربندی الکتروستاتیکی توسط رابطهٔ زیر به‌دست می‌آیند:

$$\vec{E}\left(\vec{x}\right)=-\nabla\phi\left(\vec{x}\right). \qquad ۵۱$$

لازم به‌تذکر است که مقدار بیشینهٔ طول بردار تکانه در فضای فاز شش بعدی $\left(x^i,p^i\right)$ بنا به رابطهٔ ۱۳ برابر $p_{\max}=\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ است. اکنون با استفاده از روابط ۴۴ و ۵۱ شکل صریح میدان الکتریکی ایستای وابسته به یک بار نقطه‌ای q از منظر جبر هایزنبرگ تعمیم یافته را در یک فضای دکارتی سه بعدی محاسبه می‌کنیم، داریم:

$$\begin{aligned}\vec{E}\left(\vec{x}\right)&=-\hat{e}_r\frac{\partial\phi\left(\vec{x}\right)}{\partial r}\\&=-\hat{e}_r\frac{d}{dr}\frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0 r}\left[Si\left(\frac{r}{(\Delta x)_0}\right)+\right.\\&\left.\frac{(\Delta x)_0}{r}\cos\left(\frac{r}{(\Delta x)_0}\right)-\frac{(\Delta x)_0^2}{r^2}\sin\left(\frac{r}{(\Delta x)_0}\right)\right]\\&=\hat{e}_r\frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0 r^2}\left[Si\left(\frac{r}{(\Delta x)_0}\right)-\right.\\&\left.3j_1\left(\frac{r}{(\Delta x)_0}\right)\right],\end{aligned} \qquad ۵۲$$

که $\hat{e}_r$ بردار واحد شعاعی بوده و $j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$ تابع کروی بسل است [۲۳]. اکنون به‌بررسی رفتار میدان الکتریکی $\vec{E}(\vec{x})$ در رابطهٔ۵۲ به‌ازای $(\Delta x)_0 \to 0$ می‌پردازیم. برای این منظور لازم است تا از شکل مجانبی انتگرال سینوسی در رابطهٔ۴۵ استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \hat{e}_r \frac{q}{2\pi^2 \varepsilon_0 r^2} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\sin\left(\frac{r}{(\Delta x)_0}\right)}{\left(\frac{r}{(\Delta x)_0}\right)} \left(\frac{(\Delta x)_0}{r} - \ldots \right) - \frac{\cos\left(\frac{r}{(\Delta x)_0}\right)}{\left(\frac{r}{(\Delta x)_0}\right)} (1 - \ldots) - 3 \left(\frac{\sin\left(\frac{r}{(\Delta x)_0}\right)}{\left(\frac{r}{(\Delta x)_0}\right)^2} - \frac{\cos\left(\frac{r}{(\Delta x)_0}\right)}{\left(\frac{r}{(\Delta x)_0}\right)} \right) \right]$$
$$= \hat{e}_r \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \left[1 + \frac{4}{\pi} \frac{(\Delta x)_0}{r} \left(\cos\left(\frac{r}{(\Delta x)_0}\right) - 2 \frac{(\Delta x)_0}{r} \sin\left(\frac{r}{(\Delta x)_0}\right) \right) + \ldots \right]$$
$$\sim \hat{e}_r \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

۵۳

رابطهٔ۵۳ نشان می‌دهد که در حد $(\Delta x)_0 \to 0$ میدان الکتریکی وابسته به یک بار نقطه‌ای q در فضای فاز شش بعدی (x^i, p^i) به‌ازای $p_{\max} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{\hbar}{(\Delta x)_0} \to \infty$ به میدان الکتریکی وابسته به یک بار نقطه‌ای q در نظریهٔ استاندارد ماکسول، یعنی $\vec{E}(\vec{x}) = \hat{e}_r \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ تبدیل می‌شود. اینک به بررسی رفتار میدان الکتریکی وابسته به یک بار نقطه‌ای q در مکان قرار گرفتن بار $(|\vec{x}| = r \to 0)$ در فضای فاز شش بعدی (x^i, p^i) از منظر جبر هایزنبرگ تعمیم یافته می‌پردازیم. برای این منظور لازم است تا از روابط۴۸ و ۵۲ استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \hat{e}_r \frac{q}{2\pi^2 \varepsilon_0 r^2} \left[\frac{r}{(\Delta x)_0} - \frac{1}{18} \left(\frac{r}{(\Delta x)_0} \right)^3 + \ldots - 3 \left(\frac{1}{3} \frac{r}{(\Delta x)_0} - \frac{1}{30} \left(\frac{r}{(\Delta x)_0} \right)^3 + \ldots \right) \right]$$
$$\sim \hat{e}_r \frac{q}{45\pi^2 \varepsilon_0 (\Delta x)_0^3} r.$$

۵۴

بنا به‌رابطهٔ۵۴ در نقاط بسیار نزدیک به بار نقطه‌ای q، یعنی $r \to 0$ میدان الکتریکی در نظریهٔ ماکسول تعمیم یافته برخلاف نظریهٔ ماکسول رفتاری منظم داشته و دارای مقداری متناهی است.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله نشان دادیم که بازفرمول‌بندی نظریهٔ الکتروستاتیک ماکسول براساس یک توسیع تک پارامتری از جبر استاندارد هایزنبرگ در یک فضای فاز شش بعدی برمبنای مراجع [۱۷و۱۸] به یک معادلهٔ پواسون تعمیم‌یافته به‌شکل $\frac{\nabla^2}{1 + (\Delta x)_0^2 \nabla^2} \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0}$ برای توزیع بار ایستای $\rho(\vec{x})$ می‌انجامد. در ادامه شکل دقیق پتانسیل الکتروستاتیکی $\phi(\vec{x})$ و میدان الکتریکی $\vec{E}(\vec{x})$ مربوط به یک بار نقطه‌ای q واقع در مبدا دستگاه مختصات دکارتی سه بعدی را از طریق حل معادلهٔ پواسون با مشتق از مرتبهٔ بی‌نهایت ۳۵ با روش تبدیل فوریه به‌دست آوردیم و نشان دادیم که مقدار $\phi(\vec{x})$ و $\vec{E}(\vec{x})$ برای نقاط بسیار نزدیک به بار نقطه‌ای $(|\vec{x}| = r \to 0)$ بر خلاف نظریهٔ ماکسول مقادیری متناهی به‌دست می‌آیند (روابط ۵۰ و ۵۴).

به‌منظور دست‌یابی به درک عمیق‌تری از مطالب گفته شده اجازه دهید تا با تعریف پارامترهای Q و R به‌صورت زیر:

$$Q := \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (\Delta x)_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \hbar \sqrt{\beta}}, \qquad ۵۵$$

$$R := \frac{r}{\left(\Delta x\right)_0}, \qquad ۵۶$$

روابط مربوط به پتانسیل الکتروستاتیکی وابسته به یک بار نقطه‌ای q در مبدا دستگاه مختصات دکارتی سه بعدی را برای الکتروستاتیک ماکسول و الکتروستاتیک ماکسول تعمیم‌یافته در رابطهٔ۴۴ به‌شکل زیر بازنویسی کنیم:

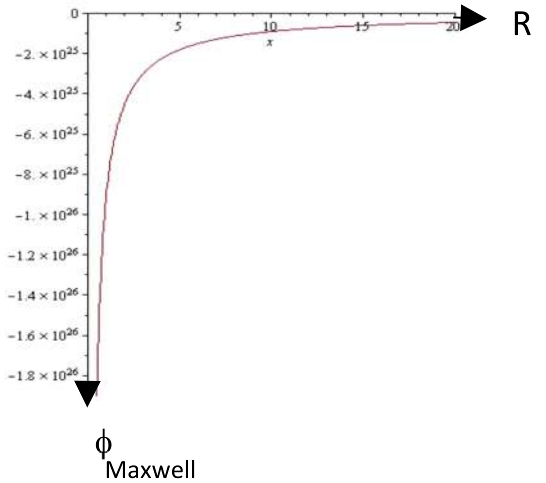
$$\phi_{Maxwell} = \frac{Q}{R}, \qquad ۵۷$$

$$\phi_{Frydryszak-Tkachuk} = \frac{2}{\pi}\frac{Q}{R}\left[Si(R)+\frac{\cos R}{R}-\frac{\sin R}{R^2}\right]. \qquad ۵۸$$

در مرجع [۱۸] تکاچوک پیش‌نهاد کرده است که مقدار عددی مقیاس طول مشخصهٔ $\left(\Delta x\right)_0$ در رابطهٔ۱۴ برای الکترون $\left(q=-e=-1.602\times10^{-19}C\right)$ برابر با طول پلانک باشد، یعنی

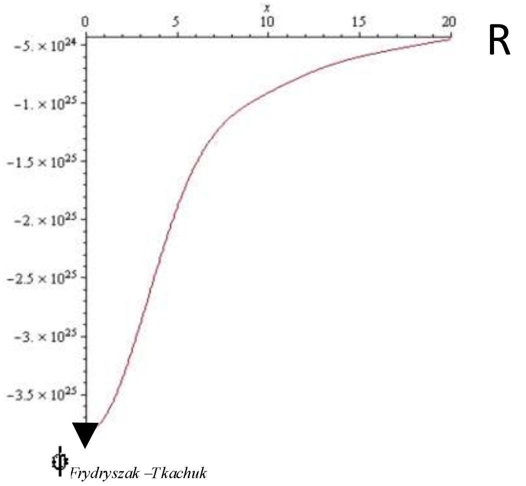
$$\left(\Delta x\right)_0 = \hbar\sqrt{\beta} = \ell_P \approx 1.6\times10^{-35}\,m. \qquad ۵۹$$

در شکل۲ رفتار پتانسیل الکتروستاتیکی $\phi_{Maxwell}$ در رابطهٔ۵۷ برای الکترون برحسب طول بی‌بعد R نشان داده شده است. همان‌طور که شکل۲ نشان می‌دهد با نزدیک شدن به الکترون $\left(R\to0\right)$ مقدار پتانسیل الکتروستاتیکی واگرا می‌گردد.



شکل۲. رفتار پتانسیل الکتروستاتیکی $\phi_{Maxwell} = \frac{Q}{R}$ برحسب R برای الکترون.

شکل۳ رفتار پتانسیل الکتروستاتیکی $\phi_{Frydryszak-Tkachuk}$ در رابطهٔ۵۸ را برای یک الکترون برحسب طول بی‌بعد R نشان می‌دهد. همان‌طور که شکل۳ نشان می‌دهد برای نقاط بسیار نزدیک به الکترون $\left(R\to0\right)$ مقدار پتانسیل الکتروستاتیکی ۵۸ برخلاف نظریهٔ ماکسول فاقد تکینگی است.



شکل۳. رفتار پتانسیل الکتروستاتیکی $\phi_{Frydryszak-Tkachuk}$ در رابطهٔ۵۸ برحسب R برای الکترون.

بر اساس محاسبات انجام گرفته در روابط ۴۶ و ۵۳ نتیجه می‌گیریم که در حد $\left(\Delta x\right)_0\to0$ نتایج حاصل از الکتروستاتیک ماکسول تعمیم یافته به نتایج حاصل

از الکتروستاتیک ماکسول برای پتانسیل الکتروستاتیکی و میدان الکتریکی بار نقطه‌ای تبدیل می‌شوند. همچنین در رژیم انرژی‌های پایین که متناظر با فواصل فضایی بزرگ می‌باشد معادلهٔ پواسون تعمیم یافتهٔ ۳۵ به‌شکل آشنای $\nabla^2\phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0}$ در می‌آید که همان معادلهٔ پواسون در الکتروستاتیک ماکسول است.

پیوست الف. مقایسهٔ میان کارهای انجام شده در این مقاله با کارهای صورت گرفته در مرجع [۱۲]

در این پیوست مقایسه‌ای بین کارهای انجام شده در این مقاله با کارهای انجام شده در مرجع [۱۲]، یعنی *EPL* ***98*** (2012) 50001 خواهیم داشت. در سال ۱۹۹۵ میلادی سه فیزیک‌دان به اسامی کمپف[1]، مانگانو[2] و من[3] موفق به‌ارائه یک تعمیم دو پارامتری از جبر هایزنبرگ در یک فضای دکارتی سه بعدی به‌شکل زیر گردیدند [۲۴]

$$\left[X^i, X^j\right] = i\hbar \frac{(2\beta-\beta') + \beta(2\beta+\beta')P^2}{1+\beta P^2}\left(P^i X^j - P^j X^i\right),$$
۶۰

$$\left[P^i, P^j\right] = 0,$$
۶۱

$$\left[X^i, P^j\right] = i\hbar\left[\delta^{ij}\left(1+\beta P^2\right) + \beta' P^i P^j\right], \quad \forall i, j \in \{1,2,3\},$$
۶۲

که β و β' دو پارامتر ثابت نامنفی با دیمانسیون $[momentum]^{-2}$ بوده و X^i و P^i به‌ترتیب عملگرهای مکان و تکانه در فضای فاز کوآنتومی دگرگون شده می‌باشند همچنین $P^2 = \sum_{i=1}^{3}\left(P^i\right)^2$ است. در مرجع [۲۵] نشان داده شده است که عملگرهای مکان و تکانهٔ تعمیم یافته X^i و P^i در روابط جبری ۶۰ تا ۶۲ دارای نمایش‌های مختصاتی مرتبه اولی برحسب پارامترهای دگرگونش β و β' به‌شکل زیر هستند:

$$X^i = x^i + \frac{2\beta-\beta'}{4}\left(p^2 x^i + x^i p^2\right) + O\left(\beta^2, \beta'^2, \beta\beta'\right),$$
۶۳

$$P^i = p^i\left(1 + \frac{\beta'}{2}p^2\right) + O\left(\beta^2, \beta'^2, \beta\beta'\right),$$
۶۴

که x^i و p^i عملگرهای مکان و تکانه در مکانیک کوآنتومی معمولی بوده و $p^2 = \sum_{i=1}^{3}\left(p^i\right)^2 = -\hbar^2\nabla^2$ است. به‌ازای $\beta' = 2\beta$ جبر معرفی شده در روابط ۶۰ تا ۶۲ به‌شکل زیر در می‌آید:

$$\left[X^i, X^j\right] = O\left(\beta^2\right), \quad \left[P^i, P^j\right] = 0,$$
$$\left[X^i, P^j\right] = i\hbar\left[\delta^{ij}\left(1+\beta P^2\right) + 2\beta P^i P^j\right].$$
۶۵

در این حالت نمایش‌های ۶۳ و ۶۴ به‌صورت بسیار سادهٔ زیر در می‌آیند:

$$X^i = x^i + O\left(\beta^2\right), P^i = p^i\left(1+\beta p^2\right) + O\left(\beta^2\right).$$
۶۶

در مرجع [۱۲] با صرفنظر کردن از جملات از مرتبهٔ بزرگی β^2 و بالاتر از آن نمایش مختصاتی مرتبهٔ اولی برحسب پارامتر دگرگونش β برای عملگرهای X^i و P^i به‌صورت زیر به‌دست آمده‌اند:

---
[1] Kempf
[2] Mangano
[3] Mann

$$X^{i}=x^{i},P^{i}=p^{i}\left(1+\beta p^{2}\right). \qquad ۶۷$$

نویسندگان مقاله [۱۲] در ادامه با بازفرمول‌بندی نظریهٔ الکتروستاتیک ماکسول بر اساس نمایش‌های تقریبی معرفی شده در رابطهٔ۶۷ به‌معادلهٔ پواسون مرتبهٔ چهارم زیر رسیده‌اند:

$$\left(1-a^{2}\nabla^{2}\right)\nabla^{2}\phi(\vec{x})=-\frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_{0}} \quad \left(a=\hbar\sqrt{2\beta}\right) \qquad ۶۸$$

و نشان داده‌اند که این معادله برای یک بار نقطه‌ای q واقع در مبدأ فضای دکارتی سه بعدی پتانسیل و میدان الکتریکی ایستایی به‌صورت زیر:

$$\phi(\vec{x})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_{0}r}\left(1-e^{-\frac{r}{a}}\right), \qquad ۶۹$$

$$\vec{E}(\vec{x})=\hat{e}_{r}\,\frac{q}{4\pi\varepsilon_{0}r^{2}}\left[1-\left(1+\frac{r}{a}\right)e^{-\frac{r}{a}}\right] \qquad ۷۰$$

را نتیجه می‌دهد.

اکنون آماده‌ایم تا به‌مقایسهٔ اختلاف میان کارهای انجام گرفته در این مقاله با کارهای انجام شده در مرجع [۱۲] بپردازیم.

۱) در مرجع [۱۲] بازفرمول‌بندی نظریهٔ الکتروستاتیک ماکسول بر اساس نمایش‌های تقریبی معرفی شده در رابطهٔ۶۷ صورت گرفته است که این نمایش‌ها جبر کمپف (روابط ۶۰ تا ۶۲) را در حالت خاص $\beta'=2\beta$ و صرفاً تا مرتبهٔاول برحسب پارامتر دگرگونش β برآورده می‌سازند در حالی که در این مقاله بازفرمول‌بندی نظریهٔ الکتروستاتیک ماکسول بر اساس نمایش‌های مختصاتی ۹ و ۱۰ صورت گرفته که نمایش‌های مزبور جبر هایزنبرگ دگرگون شدهٔ معرفی شده توسط تکاچوک (روابط ۶ تا ۸) را به‌صورت دقیق تا تمامی مرتبه‌ها برآورده می‌سازند [۱۸].

۲) بازفرمول‌بندی نظریهٔ الکتروستاتیک ماکسول بر اساس نمایش‌های تقریبی مرتبهٔ اول معرفی شده در مرجع [۱۲] به‌معادلهٔ پواسون مرتبهٔ چهارم ۶۸ منجر می‌شود که معادلهٔ فوق به لحاظ ریاضی یک معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی مرتبهٔ چهارم ناهمگن است. از این رو عبارت‌های به‌دست آمده برای پتانسیل و میدان الکتریکی بار نقطه‌ای در روابط ۶۹ و ۷۰ نیز روابطی تقریبی می‌باشند در حالی که معادلهٔ پواسون به‌دست آمده در این مقاله، یعنی معادلهٔ۳۵ بر مبنای نمایش‌های دقیق مختصاتی ۹ و ۱۰ بوده و بنا بر این روابط مربوط به پتانسیل و میدان الکتریکی بار نقطه‌ای، یعنی روابط ۴۴ و ۵۲ روابطی غیر اختلالی[1] و دقیق بوده و تا تمامی مرتبه‌ها برقرار می‌باشند. با توجه به مطالب گفته شده کارهای انجام گرفته در این مقاله را می‌توان گامی رو به جلو در جهت درک رفتار غیر اختلالی نظریهٔ الکتروستاتیک ماکسول در حضور برش تکانهٔ $p_{\max}=\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ (رابطهٔ۱۳) به‌شمار آورد.

پیوست ب. بازفرمول‌بندی نظریهٔ ماکسول در حضور برش تکانهٔ $p_{\max}=\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ در چارچوب هموردا و بررسی تقارن پیمانه‌ای نظریهٔ همموردای به‌دست آمده

به‌منظور ارائه یک فرمول‌بندی هموردا از نظریهٔ ماکسول در حضور برش تکانهٔ $p_{\max}=\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ (رابطهٔ۱۳) لازم است تا نخست یک تعمیم هموردا از جبر هایزنبرگ دگرگون شدهٔ معرفی شده توسط تکاچوک (روابط ۶ تا ۸) به‌صورت زیر ارائه گردد:

$$\left[X^{\mu},X^{\nu}\right]=0, \qquad ۷۱$$

[1] Non-perturbative

$$\left[P^{\mu},P^{\nu}\right]=0, \qquad ۷۲$$

$$\left[X^{\mu},P^{\nu}\right]=-i\hbar\sqrt{1-\beta P^{2}}\left(\eta^{\mu\nu}-\beta P^{\mu}P^{\nu}\right), \quad \forall\mu,\nu\in\{0,1,2,3\}, \qquad ۷۳$$

که X^{μ} و P^{μ} به‌ترتیب مؤلفه‌های عمل‌گر مکان و تکانه در فضا–زمان مینکوفسکی چهار بعدی با متریک:

$$\eta_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix} \qquad ۷۴$$

بوده و $P=\sqrt{\left(P^{0}\right)^{2}-\sum_{i=1}^{3}\left(P^{i}\right)^{2}}$ است. در اینجا نیز همانند روابط جبری ۶ تا ۸ β یک پارامتر ثابت نامنفی با دیمانسیون $\left[momentum\right]^{-2}$ می‌باشد. با اندکی محاسبه می‌توان نشان داد که عمل‌گرهای مکان X^{μ} و تکانهٔ P^{μ} در جبر هموردای هایزنبرگ دگرگون شده، یعنی روابط جابه‌جایی ۷۱ تا ۷۳ دارای نمایش مختصاتی دقیقی به‌صورت زیر می‌باشند:

$$X^{\mu}=x^{\mu}, \qquad ۷۵$$

$$P^{\mu}=\frac{1}{\sqrt{1+\beta p^{2}}}p^{\mu}, \qquad \forall\mu\in\{0,1,2,3\}. \qquad ۷۶$$

در روابط ۷۵ و ۷۶

$$p^{2}=-\hbar^{2}\Box=-\hbar^{2}\left(\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}-\nabla^{2}\right)$$

بوده و x^{μ} و p^{μ} عملگرهای مکان و تکانهٔ معمولی در فضا–زمان مینکوفسکی چهار بعدی هستند که روابط جابه‌جایی زیر را که به آنها جبر هموردای هایزنبرگ گفته می‌شود برآورده می‌سازند:

$$\left[x^{\mu},x^{\nu}\right]=0, \qquad ۷۷$$

$$\left[p^{\mu},p^{\nu}\right]=0, \qquad ۷۸$$

$$\left[x^{\mu},p^{\nu}\right]=-i\hbar\eta^{\mu\nu}. \qquad ۷۹$$

بنا به‌روابط ۷۵ و ۷۶ در هنگام بازفرمول‌بندی یک نظریهٔ میدان از منظر جبر هموردای هایزنبرگ دگرگون شده ۷۱ تا ۷۳ در فضا–زمان مینکوفسکی چهار بعدی لازم است تا عمل‌گرهای مکان و مشتق استاندارد، یعنی $\left(x^{\mu},\partial_{\mu}\right)$ بر طبق دستورالعمل زیر با عمل‌گرهای مکان و مشتق تعمیم یافتهٔ $\left(X^{\mu},D_{\mu}\right)$ جایگزین شوند:

$$x^{\mu}\rightarrow X^{\mu}=x^{\mu}, \qquad ۸۰$$

$$\partial_{\mu}\rightarrow D_{\mu}:=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\Delta x\right)_{0}^{2}\Box}}\partial_{\mu}. \qquad ۸۱$$

در رابطهٔ ۸۱، $\left(\Delta x\right)_{0}=\frac{\hbar}{p_{\max}}$ همان مقیاس طول مشخصه تعریف شده در رابطهٔ ۱۴ است. صورت تانسوری معادلات ناهمگن ماکسول در یک فضا–زمان مینکوفسکی چهاربعدی با متریک ۷۴ به‌شکل زیر است:

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu}\left(x\right)=\mu_{0}J^{\nu}\left(x\right), \qquad ۸۲$$

که $A^{\mu}=\left(\frac{1}{c}\phi,\vec{A}\right)$ چاربردار پتانسیل و $J^{\mu}=\left(c\rho,\vec{J}\right)$ چاربردار جریان می‌باشند و $F_{\mu\nu}=\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu}$ تانسور شدت میدان الکترومغناطیسی است که رابطهٔ زیر موسوم به‌اتحاد بیانکی[1] را برآورده می‌سازد:

$$\partial_{\mu}F_{\nu\lambda}\left(x\right)+\partial_{\nu}F_{\lambda\mu}\left(x\right)+\partial_{\lambda}F_{\mu\nu}\left(x\right)=0. \qquad ۸۳$$

[1]Bianchi identity

با توجه به‌رابطهٔ ۸۰ هنگامی که از مختصات $x^{\mu}=\left\{x^{0},x^{1},x^{2},x^{3}\right\}$ به‌مختصات $X^{\mu}=\left\{X^{0},X^{1},X^{2},X^{3}\right\}$ می‌رویم تانسورهای مرتبهٔ اول هموردای $A_{\mu}\left(x\right)$ و $J_{\mu}\left(x\right)$ به‌صورت زیر تبدیل پیدا می‌کنند:

$$\begin{aligned} A_{\mu}\left(x\right)\rightarrow a_{\mu}\left(X\right) &= \sum_{\nu=0}^{3}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial X^{\mu}}A_{\nu}\left(x\right) \\ &= \sum_{\nu=0}^{3}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu}}A_{\nu}\left(x\right) \\ &= \sum_{\nu=0}^{3}\delta_{\mu}^{\nu}A_{\nu}\left(x\right) \\ &= A_{\mu}\left(x\right), \end{aligned} \qquad ۸۴$$

$$\begin{aligned} J_{\mu}\left(x\right)\rightarrow j_{\mu}\left(X\right) &= \sum_{\nu=0}^{3}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial X^{\mu}}J_{\nu}\left(x\right) \\ &= \sum_{\nu=0}^{3}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu}}J_{\nu}\left(x\right) \\ &= \sum_{\nu=0}^{3}\delta_{\mu}^{\nu}J_{\nu}\left(x\right) \\ &= J_{\mu}\left(x\right). \end{aligned} \qquad ۸۵$$

با توجه به‌روابط ۸۱ و ۸۴ تانسور شدت میدان الکترومغناطیسی $F_{\mu\nu}\left(x\right)$ در فضای دگرگون شده به‌صورت زیر در می‌آید:

۸۶

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}\left(x\right)\rightarrow f_{\mu\nu}\left(X\right) &= D_{\mu}a_{\nu}\left(X\right)-D_{\nu}a_{\mu}\left(X\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\Delta x\right)_{0}^{2}\Box}}\partial_{\mu}A_{\nu}\left(x\right)-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\Delta x\right)_{0}^{2}\Box}}\partial_{\nu}A_{\mu}\left(x\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\Delta x\right)_{0}^{2}\Box}}F_{\mu\nu}\left(x\right). \end{aligned}$$

با توجه به‌آنچه گفته شد برای به‌دست آوردن شکل تانسوری معادلات ناهمگن ماکسول در یک فضا–زمان مینکوفسکی چهاربعدی در حضور برش تکانهٔ $p_{\max}=\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ کافی است تا جایگزینی‌هایی به‌شکل زیر:

$$\partial_{\mu}\rightarrow D_{\mu}$$
$$F^{\mu\nu}\left(x\right)\rightarrow f^{\mu\nu}\left(X\right)$$
$$J^{\nu}\left(x\right)\rightarrow j^{\nu}\left(X\right)$$

در معادلهٔ ۸۲ انجام شود، یعنی:

$$D_{\mu}f^{\mu\nu}\left(X\right)=\mu_{0}j^{\nu}\left(X\right), \qquad ۸۷$$

و یا

$$\frac{1}{1-\left(\Delta x\right)_{0}^{2}\Box}\partial_{\mu}F^{\mu\nu}\left(x\right)=\mu_{0}J^{\nu}\left(x\right). \qquad ۸۸$$

معادلهٔ ۸۸ همان صورت تانسوری معادلات ناهمگن ماکسول در حضور برش تکانهٔ $p_{\max}=\frac{\hbar}{\left(\Delta x\right)_{0}}$ می‌باشد. در حد $\left(\Delta x\right)_{0}\rightarrow 0$ معادلهٔ ۸۸ به معادلهٔ ۸۲ تبدیل می‌شود. همان گونه که دیده می‌شود معادلهٔ ۸۸ تحت اثر تبدیلات پیمانه‌ای به‌صورت زیر:

$$A_{\mu}\left(x\right)\rightarrow A'_{\mu}\left(x\right)=A_{\mu}\left(x\right)+\partial_{\mu}\Lambda\left(x\right) \qquad ۸۹$$

ناوردا است ($\Lambda(x)$ تابعی هموار و مشتق‌پذیر از فضا–زمان می‌باشد). بنا بر این نظریهٔ ماکسول در حضور برش تکانهٔ $p_{\max}=\frac{\hbar}{\left(\Delta x\right)_{0}}$ همانند نظریهٔ ماکسول معمولی دارای تقارن پیمانه‌ای است. اگر از طرفین معادلهٔ ۸۸ $\partial_{\nu}=\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}$ بگیریم مشاهده می‌کنیم که چار بردار جریان $J^{\nu}\left(x\right)$ در شکل هموردای معادلهٔ پیوستگی بار و جریان، یعنی معادلهٔ زیر صدق می‌کند (توجه داشته باشید که ∂_{ν} و عبارت $\frac{1}{1-\left(\Delta x\right)_{0}^{2}\Box}$ با یکدیگر جابه‌جا می‌گردند):

$$\partial_{\nu}J^{\nu}\left(x\right)=0. \qquad ۹۰$$

مؤلفهٔ $\nu=0$ معادلهٔ ۸۸ به‌صورت زیر است:

$$\left(F^{10}=\frac{E_x}{c},F^{20}=\frac{E_y}{c},F^{30}=\frac{E_z}{c}\right)$$

$$\frac{1}{1-(\Delta x)_0^{\,2}\Box}\nabla.\vec{E}\left(\vec{x},t\right)=\frac{\rho\left(\vec{x},t\right)}{\varepsilon_0}.$$

۹۱

برای یک پیکربندی ایستا از بارهای الکتریکی معادلهٔ ۹۱ به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{1}{1+(\Delta x)_0^{\,2}\nabla^2}\nabla.\vec{E}\left(\vec{x}\right)=\frac{\rho\left(\vec{x}\right)}{\varepsilon_0}. \qquad ۹۲$$

معادلهٔ۹۲ شکل دیفرانسیلی قانون گاؤس در الکتروستاتیک ماکسول در حضور برش تکانهٔ $p_{\max}=\frac{\hbar}{(\Delta x)_0}$ می‌باشد. اگر میدان الکتریکی ایستای $\vec{E}\left(\vec{x}\right)$ را از رابطهٔ۵۱، یعنی $\vec{E}\left(\vec{x}\right)=-\nabla\phi\left(\vec{x}\right)$ در رابطهٔ۹۲ قرار دهیم مجدداً به معادلهٔ۳۵، یعنی معادلهٔ پواسون با مشتق از مرتبهٔ بی‌نهایت $\frac{\nabla^2}{1+(\Delta x)_0^{\,2}\nabla^2}\phi\left(\vec{x}\right)=-\frac{\rho\left(\vec{x}\right)}{\varepsilon_0}$ می‌رسیم. در مرجع [۱۲] بر اساس ملاحظات مربوط به الکترودینامیک کلاسیک برای مقیاس طول مشخصهٔ $(\Delta x)_0$ کران عددی بالایی برابر:

$$(\Delta x)_0\sim 10^{-10}m \qquad ۹۳$$

تخمین زده شده است. با فرض صحت وجود چنین کران بالایی برای $(\Delta x)_0$ می‌توان امید داشت که امکان مشاهدهٔ نتایج تجربی بعضی از محاسبات انجام گرفته در این مقاله در مقیاس‌های طولی از مرتبهٔ $10^{-10}m$ (مقیاس طولی در فیزیک اتمی) وجود داشته باشد.

مرجع‌ها

[1] A. Rostami, S.K. Moayedi, Exact solution for light propagation through inhomogeneous media, *Indian Journal of Physics* ***75 B*** *4* (2001) 357-361.

[2] S.K. Moayedi, A. Rostami, PT-invariant Helmholtz optics and its applications to slab waveguides, *European Physical Journal B* ***36*** (2003) 359-363. https://doi.org/10.1140/epjb/e2003-00354-5

[3] A. Rostami, S.K. Moayedi, TM mode in inhomogeneous slab waveguide as an exactly solvable oscillator-like Hamiltonian, *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics* ***5*** (2003) 380-385. https://doi.org/10.1088/1464-4258/5/4/313

[4] S.M. Blinder, Singularity-free electrodynamics for point charges and dipoles: a classical model for electron self-energy and spin, *European Journal of Physics* ***24*** (2003) 271-275. https://doi.org/10.1088/0143-0807/24/3/307

[5] R.B. Santos, Plasma-like vacuum in Podolsky regularized classical electrodynamics, *Modern Physics Letters A* ***26*** (2011) 1909-1915. https://doi.org/10.1142/S0217732311036395

[6] M. Born, L. Infeld, Foundations of the new field theory, *Proceedings of the Royal Society of London A* ***144*** (1934) 425-451. https://doi.org/10.1098/rspa.1934.0059

[7] S.K. Moayedi, M. Shafabakhsh, F. Fathi, Analytical calculation of stored electrostatic energy per unit length for an infinite charged line and an infinitely long cylinder in the framework of Born-Infeld electrostatics, *Advances in High Energy Physics* ***2015*** (2015) 180185. https://doi.org/10.1155/2015/180185

[8] F. Bopp, Eine lineare Theorie des Elektrons, *Annalen der Physik* ***430*** (1940) 345-384. https://doi.org/10.1002/andp.19404300504

[9] B. Podolsky, A generalized electrodynamics part I-non-quantum,

[16] M. Ranaiy, S.K. Moayedi, The short-distance behavior of an Abelian Proca model based on a one-parameter extension of the covariant Heisenberg algebra, *Modern Physics Letters A* ***35*** (2020) 2050038. https://dx.doi.org/10.1142/S0217732320500388

[17] A.M. Frydryszak, V.M. Tkachuk, Aspects of pre-quantum description of deformed theories, *Czechoslovak Journal of Physics* ***53*** (2003) 1035-1040. https://doi.org/10.1023/B:CJOP.0000010529.32268.03

[18] V.M. Tkachuk, Galilean and Lorentz transformations in a space with generalized uncertainty principle, *Foundations of Physics* ***46*** (2016) 1666–1679. https://doi.org/10.1007/s10701-016-0036-5

[19] W.S. Chung, H. Hassanabadi, New generalized uncertainty principle from the doubly special relativity, *Physics Letters B* ***785*** (2018) 127-131. https://doi.org/10.1016/j.physletb.2018.07.064

[20] K. Nozari, M.A. Gorji, V. Hosseinzadeh, B. Vakili, Natural cutoffs via compact symplectic manifolds, *Classical and Quantum Gravity* ***33*** (2015) 025009. https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/33/2/025009

[21] K. Nozari, A. Etemadi, Minimal length, maximal momentum, and Hilbert space representation of quantum mechanics, *Physical Review D* ***85*** (2012) 104029. https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.85.104029

[22] N. Moeller, B. Zwiebach, Dynamics with infinitely many time derivatives and rolling tachyons, *JHEP* ***10*** (2002) 034.

Physical Review ***62*** (1942) 68-71. https://doi.org/10.1103/PhysRev.62.68

[10] A. Pais, G.E. Uhlenbeck, On field theories with non-localized action, *Physical Review* ***79*** (1950) 145-165. https://doi.org/10.1103/PhysRev.79.145

[11] H.S. Snyder, Quantized space-time, *Physical Review* ***71*** (1947) 38-41. https://doi.org/10.1103/PhysRev.71.38

[12] S.K. Moayedi, M.R. Setare, H. Moayeri, Formulation of an electrostatic field with a charge density in the presence of a minimal length based on the Kempf algebra, *EPL* ***98*** (2012) 50001. https://doi.org/10.1209/0295-5075/98/50001

[13] S.K. Moayedi, M.R. Setare, B. Khosropour, Formulation of electrodynamics with an external source in the presence of a minimal measurable length, *Advances in High Energy Physics* ***2013*** (2013) 657870. https://dx.doi.org/10.1155/2013/657870

[14] A.V. Silva, E.M.C. Abreu, M.J. Neves, Quantum electrodynamics and the electron self-energy in a deformed space with a minimal length scale, *International Journal of Modern Physics A* ***31*** *(2016)* 1650096. https://dx.doi.org/10.1142/S0217751X16500962

[15] A. Izadi, S.K. Moayedi, Lagrangian formulation of an infinite derivative real scalar field theory in the framework of the covariant Kempf–Mangano algebra in a (D+1)-dimensional Minkowski space–time, *Annals of physics* ***411*** (2019) 167956. https://doi.org/10.1016/j.aop.2019.167956

https://doi.org/10.1088/1126-6708/2002/10/034

[23] M.R. Spiegel, S. Lipschutz, J. Liu, *Schaum's Outline of Mathematical Handbook of Formulas and Tables, Fifth Edition*, McGraw-Hill, (2018).

[24] A. Kempf, G. Mangano, R.B. Mann, Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation, *Physical Review D* ***52*** (1995) 1108-1118. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.52.1108

[25] M.M. Stetsko, V.M. Tkachuk, Scattering problem in deformed space with minimal length, *Physical Review A* ***76*** (2007) 012707. https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.76.012707