

Varying gravitational coupling theories and the Generalized Rastall Theory

Hamid Shabani*

Physics Department, Faculty of Sciences, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Iran

Received: 23.06.2022 Final revised: 15.08.2022 Accepted: 06/02/2023

Doi link: [10.22055/jrmbs.2023.18130](https://doi.org/10.22055/jrmbs.2023.18130)

Abstract

In this paper, the compatibility of the Dirac cosmological model which leads to gravitational theories with a varying gravitational coupling parameter in the context of the generalized Rastall theory has been studied. Moreover, in this scenario, the problem of the current accelerated expansion of the Universe has been considered. Two different cosmic fluids have been investigated. Generalized Polytropic matter, which leads to an observationally consistent model. Also, considering the generalized Chaplygin gas, it is shown that an astronomically consistent model cannot be obtained. Briefly speaking, we came to the result that the generalized Rastall theory is capable of being matched with the Dirac hypothesis leading to the present accelerated expansion of the Universe.

Keywords: Dirac hypothesis, Rastall theory, accelerated universe, modified gravity.

* Corresponding Author: h.shabani@phys.usb.ac.ir



نظریه‌های جفت‌شدگی گرانشی متغیر و نظریه راستال‌تعمیم یافته

حمید شعبانی*

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

دریافت: ۱۴۰۱/۰۴/۰۲ ویرایش نهایی: ۱۴۰۱/۰۵/۲۴ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۱/۱۷

Doi link: [10.22055/jrmb.2023.18130](https://doi.org/10.22055/jrmb.2023.18130)

چکیده

در این مقاله، سازگاری مدل کیهان‌شناسی دیراک که منجر به نظریات گرانشی با جفت‌شدگی گرانشی متغیر می‌شود در چارچوب نظریه راستال‌تعمیم یافته مورد مطالعه قرار گرفته است. علاوه بر این، مسأله کیهان‌شناختی در این سناریو بررسی شده است. دو ماده با معادله حالت‌های متفاوت در نظر گرفته شده‌اند. ماده چندشکلی تعمیم‌یافته، که در بازه‌ای از مقادیر ثابت‌های مدل، سازگاری قابل قبولی با مشاهدات رصدی دارد. همچنین، با بررسی معادله حالت گاز چاپلین تعمیم یافته نشان داده شد که مدل گرانشی تحت بررسی که شامل این ماده باشد سازگاری کمتری با نتایج نجومی نشان می‌دهد. به‌طور خلاصه، ما به این نتیجه رسیدیم که نظریه تعمیم یافته راستال قادر است با فرضیه دیراک انطباق یافته، منجر به کیهان‌شناختی کنونی شود.

کلیدواژگان: فرضیه دیراک، نظریه راستال، کیهان‌شناختی، گرانش اصلاح شده

مقدمه

عبور نور از یک الکترون $N_2 = 4\pi\epsilon_0 G c^3 m_e / t \approx 10^{40}$ (با c سرعت نور و t سن کیهان)، بیان داشت که به دلیل چنین برابری، حداقل برخی از ثابت‌های بنیادی نمی‌توانند برای همیشه ثابت باشند، چرا که N_2 تابع سن کیهان است. به بیان دقیقتر، به اعتقاد دیراک پارامترهای اتمی نمی‌توانند تابع زمان باشند، در نتیجه، برابری دو عبارت فوق به این معناست که $G \propto t^{-1}$ [۸-۹]. ایده دیراک تاکنون نتایج جالبی به همراه داشته و سازگاری آن با برخی نظریه‌ها مورد بررسی قرار گرفته است، به عنوان مثال، نظریه سنتز باریونی^۱ [۱۰]، شتاب اولیه و کنونی کیهان [۱۱]، سازگاری با فضا-زمان دو سیتز^۲ [۱۲-۱۳]. در مقاله [۱۴] نگارنده و همکاران نشان داده‌اند که با

این ایده که پارامتر جفت‌شدگی گرانشی طی تحول کیهان مقادیر متفاوتی را تجربه کرده است ابتدا توسط دیراک مطرح شد [۳-۱]. او ابراز داشت که ظهور اعداد بسیار بزرگ یا بسیار کوچک بدون بعد، که ترکیبی از ثابت‌های طبیعی فیزیک هستند نمی‌تواند اتفاقی باشد، بلکه نمودی از ارتباط نهفته بین آنها است [۷-۴]. در این راستا، وی با مقایسه نسبت نیروی الکتروستاتیکی بین یک الکترون و یک پروتون در یک هسته اتم هیدروژن که تقریباً از مرتبه $N_1 = e^2 / 4\pi\epsilon_0 G m_p m_e \approx 10^{40}$ (با e بار الکترون، ϵ_0 گذردهی خلأ، m_p جرم پروتون، m_e جرم الکترون) است با نسبت سن کیهان به مدت زمان

* نویسنده مسئول: h.shabani@phys.usb.ac.ir

¹ Baryogenesis

² de Sitter space-time



به حساب آوردن نظریه دیراک، مدل گرانشی راستال
تعمیم یافته می تواند شتاب فزاینده کنونی کیهان را تنها
با حضور ماده باریونی توضیح دهد.

انگیزه طرح پیشنهاد دیراک در مدل های گرانشی تعمیم
یافته گرانشی را به این صورت می توان توضیح داد؛
خیلی ساده، از آنجایی که مشتق هموردای تانسور
اینشتین صفر است (یعنی، $\nabla^\alpha G_{\alpha\beta} = 0$) در نسبیت
عام (GR) با فرض پایستگی تانسور انرژی-تکانه
($\nabla^\alpha T_{\alpha\beta} = 0$) تنها، یک جفت شدگی گرانشی با
مقدار ثابت قابل پذیرش است. یعنی، نظریه دیراک قابل
ادغام با GR نیست. می توان نتیجه گرفت که برای
تحقیق نظریه جفت شدگی گرانشی متغیر، بایستی
تغییراتی در GR در نظر گرفت. از سویی دیگر، با در
نظر گرفتن یک پارامتر جفت شدگی گرانشی تابع زمان،
ما با نقض پایستگی تانسور انرژی-تکانه مواجه هستیم
که این به نوبه خود نظریه متفاوتی را نسبت به GR القاء
می کند. از این حیث، می توان نتیجه گرفت که، اینکه
تغییرات تانسور انرژی-تکانه و پارامتر G به هم مرتبط
می شوند به این معناست که شاید یک رابطه ویژه ای بین
ماده و هندسه در میان است. چرا که G، طبق معادله
میدان رابط بین بخش هندسی و بخش ماده است.

با این وجود، تا جایی که به یک پارامتر G متغیر مربوط
می شود، می توان مدل هایی را مطرح کرد که در آنها
تانسور انرژی-تکانه پایسته است. معروف ترین آنها در
این حوزه، نظریه برنز-دیکی^۱ است که در آن یک میدان
نرده ای ϕ منشأ پارامتر جفت شدگی گرانشی است و
به صورت $G \propto \phi^{-1}$ با هم مرتبط هستند [۱۸-۱۵].

همان طور که ذکر شد، در نظریه های مرتبط با پارامتر
گرانشی متغیر، پایستگی تانسور انرژی-تکانه می تواند
نقض شود. به عنوان نظریه ای که این اصل پایستگی در
آن برقرار نیست (حتی با فرض ثابت بودن G)، مدل
گرانشی راستال را می توان نام برد. در سال ۱۹۲۲

راستال^۲ برای اولین بار این پرسش را مطرح کرد که چرا
باید پایستگی انرژی به طور عمومی حتی در فضا-
زمان های خمیده برقرار باشد با این دانش که شواهد
نظری و آزمایشگاهی موجود تنها به نفع پایستگی انرژی
در یک فضا-زمان تخت است [۱۹]. او ابتدا قانون
مذکور را به صورت $\nabla^\alpha T_{\alpha\beta} = a_\beta$ به چالش کشید که
 a_μ یک میدان برداری است که در یک فضا-زمان
تخت صفر است. بعداً، او گزینه $\nabla^\alpha T_{\alpha\beta} = \lambda' \nabla_\beta R$
را انتخاب کرد که R ناوردای ریچی است و λ'
پارامتر راستال نامیده می شود. با این انتخاب می توان
به سادگی به معادله میدان
 $\kappa' T_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} + \lambda' \kappa' R g_{\alpha\beta}$ رسید، که در آن κ'
پارامتر جفت شدگی گرانشی در این نظریه است. این
نظریه که به مدل گرانشی راستال (RG) معروف شده
است با مشاهدات مختلفی توافق داشته است [۲۵-۲۰].
از ویژگی های دیگر این نظریه مواردی را می توان
برشمرد، از جمله؛ فاقد دو مسأله سن و آنتروپی که در
کیهان شناسی استاندارد وجود دارند است [۲۶].
همچنین شامل حل مربوط به دوره کیهان شناسی ماده-
غالب می باشد [۲۷]. با این وجود، در این نظریه به دلیل
اینکه پارامتر راستال مقدار ثابتی است، مسأله شتاب
انبساط کنونی کیهان نمی تواند توضیح داده شود (همانند
GR). تاکنون، این نظریه در حوزه های گرانشی مختلف
مورد استفاده قرار گرفته است [۳۵-۲۸].

حداقل از منظر کیهان شناسی، به این دلیل که مدل RG
نمی تواند توصیفی از دوره های تورمی ابتدایی و کنونی
تحول کیهانی را ارائه دهد، این انگیزه ایجاد شده است
که تصحیحاتی روی آن انجام گیرد. توجه داشته باشید
که چون هیچ گونه شواهدی مبنی بر پایستگی انرژی در
فضا-زمان خمیده وجود ندارد، همچنان بررسی
تعمیم های مختلفی از مدل RG قابل پذیرش است. در
این راستا، مدل جدیدی معرفی شده است که در آن

² P. Rastall

¹ Brans-Dicke theory

متغیر بررسی کند. بدین منظور، در بخش بعد معادله‌ها و روابط GRG را معرفی کرده و سپس رفتار چند کمیت مهم در کیهان‌شناسی را برای دو معادله حالت متفاوت از طریق بررسی منحنی‌هایشان، مطالعه می‌کنیم. در ادامه دو مدل را با داده‌های رصدی پارامتر هابل مقایسه آماری می‌کنیم. در خاتمه، نتایج پژوهش حاضر بیان می‌گردد.

معادله میدان راستال تعمیم یافته

در این بخش به مرور معادلات مرتبط با نظریه راستال تعمیم یافته می‌پردازیم. همان‌طور که در مقدمه اشاره شد، معادلات میدان GRG به صورت زیر می‌باشند:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = \nabla^{\nu} (\lambda R) \quad 1$$

که با استفاده از اتحاد بیانکی^۳ به معادله میدان زیر می‌رسیم:

$$G_{\mu\nu} + \lambda \kappa R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad 2$$

که در آن κ ثابت جفت‌شدگی راستال نامیده می‌شود و در حالت کلی داریم $\kappa \neq 8\pi G_0$ که G_0 ثابت گرانشی نیوتونی می‌باشد. λ نیز پارامتر راستال نامیده می‌شود که در GRG تابع مختصات فضا-زمان است. در مقاله [۱۴] با محاسبه حد نیوتونی GRG، نشان داده شده است که پارامتر جفت‌شدگی گرانشی نیوتونی (که G_0 مقدار کنونی آن می‌باشد) به صورت زیر با پارامتر راستال در ارتباط است:

$$\frac{\kappa}{4\kappa\lambda} (3\kappa\lambda - \frac{1}{2}) = \kappa_G \quad 3$$

که $\kappa_G = 4\pi G$ است. در واقع رابطه^۳ رفتار زمانی G را به پارامتر راستال که تابع زمان است مرتبط می‌کند. در این مقاله فرض می‌کنیم فضا-زمان همگن و همسانگرد تخت است و با متریک FLRW به صورت زیر:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad 4$$

پارامتر راستال می‌تواند تابع مختصات فضا-زمان باشد [۳۶]. در واقع، در این مدل پایستگی انرژی به صورت $\nabla^{\alpha} T_{\alpha\beta} = \nabla_{\beta} (\lambda R)$ نقض می‌شود. در این حالت معادله میدان $G_{\mu\nu} + \lambda \kappa R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$ به دست می‌آید. این مدل به گراننش راستال تعمیم یافته^۱ (GRG) شهرت یافته است. پژوهش‌های مختلفی روی این نظریه انجام شده از جمله اینکه این مدل می‌تواند یک دوره انبساط تورمی را حتی بدون حضور ماده توصیف کند [۳۶]. همچنین، حل‌های مربوط به دوره‌های تورمی اولیه و نهایی کیهان را می‌توان در این مدل یافت [۳۷]. در یک پژوهش جالب، مؤلفان ارتباط بین دو مدل RG و GRG را با گراننش $f(R, T)$ (که در کنش این نظریه به جای صرفاً ناوردای ریچی از تابع دلخواهی از ناوردای ریچی و رد تانسور انرژی-تکانه استفاده می‌شود) مورد بررسی قرار دادند [۳۵]. در پژوهش [۳۸] پدیده رمبش گرانشی غیر-تکین در GRG تحلیل و بررسی قرار گرفت. همان‌طور که قبلاً ذکر آن رفت با انتخاب $\kappa\lambda = \xi H^n / R$ (که H پارامتر هابل و n و ξ دو ثابت دلخواه هستند) مؤلفان [۱۴] نشان داده‌اند که شتاب کنونی انبساط کیهانی می‌تواند در بستر GRG با یک پارامتر جفت‌شدگی متغیر، تنها در حضور ماده باریونی، توضیح داده شود. در پژوهش [۳۹] با انتخاب همان تابع برای پارامتر راستال، حل‌های کیهان‌شناسی GRG از منظر رهیافت سامانه‌های تحلیلی^۲ مورد بررسی قرار گرفتند. پژوهش‌های دیگری در مورد GRG عبارت‌اند از: حل‌های سیاه‌چاله‌ای [۴۰]، بررسی تحول انرژی تاریک [۴۱]، مدل‌های مختلف انرژی تاریک [۴۲-۴۳] و حل‌های استاتیک اینشتین [۴۴]. در این مقاله، مؤلف سعی دارد مسأله شتاب کنونی کیهان را در حضور دو ماده با معادله حالت‌های متفاوت با به حساب آوردن یک پارامتر جفت‌شدگی گرانشی

³ Bianchi identity

¹ Generalized Rastall gravity

² Dynamical system approach

حالت کلی تابعی از زمان است. در ادامه فرض می‌کنیم که تابع f به صورت $f = (a/a_0)^{-n}$ با $n > 0$ تغییر می‌کند. در این صورت G تابعی نزولی است که در زمان کنونی مقدار آن G_0 می‌شود. در دو بخش بعدی دو معادله حالت چندشکلی تعمیم یافته^۲ و گاز چاپلین تعمیم یافته^۳ را برای ماده کیهانی در نظر گرفته و تحول کیهان را با فرض اینکه فرضیه دیراک برقرار است بررسی می‌کنیم.

کیهان و معادله حالت چندشکلی تعمیم یافته

در این بخش فرض می‌کنیم ماده کیهانی دارای معادله حالت زیر است:

$$p = \tau\rho + k\rho^{1+\frac{1}{m}}, \quad ۸$$

که در آن τ و k ثابت‌های اختیاری هستند. این معادله حالت به چندشکلی تعمیم یافته شهرت دارد. این معادله حالت در حل‌های گرانشی مربوط به یک توده کروی کاربرد دارد [۴۵-۴۶]. رفتار تحولی کیهان را با مطالعه روی معادلات ۸-۴ و انتخاب تابع f به صورتی که ذکر شد می‌توان به تصویر کشید. توجه داشته باشید در نظریه حاضر پنج پارامتر آزاد m ، n ، α ، k و τ وجود دارند که همه آنها مستقل نیستند. در حقیقت با استفاده از معادله قیدی^۶، معادله حالت^۸ و تعریف پارامتر چگالی بدون بعد ماده (برای دوره زمانی کنونی) یعنی $\Omega_0 = 8\pi G_0 \rho_0 / 3H_0^2$ می‌توان رابطه زیر را بین آنها به دست آورد

$$\alpha = 1 + \frac{2(-1 + \Omega_0)}{3\Omega_0 \left(-1 + \tau + k \left(3H_0^2 \Omega_0 \right)^{\frac{1}{m}} \right)}. \quad ۹$$

شکل ۱ منحنی‌های مربوط به پارامتر کند شونددگی برای ماده GPEoS را نمایش می‌دهد. مقادیر انتخاب شده برای پارامترهای آزاد روی شکل نشان داده شده‌اند.

مشخص می‌شود که $a(t)$ پارامتر مقیاس است. با تعریف $G = G_0 f$ که f یک تابع نزولی از زمان است و $\kappa = 8\pi G_0 \alpha$ که ثابتی اختیاری است معادلات ۱، ۲ و ۳ به معادلات تحولی زیر می‌انجامند:

$$\lambda\kappa = \frac{f - \alpha}{4f - 6\alpha}, \quad ۴$$

$$3\int(\rho + p)\frac{da}{a} = \quad ۵$$

$$\frac{1}{2a}[(f - 3\alpha)\rho - 3(f - \alpha)p],$$

$$H^2 = \frac{1}{6}[(3\alpha - f)\rho + 3(f - \alpha)p]. \quad ۶$$

با استفاده از معادلات ۴، ۵ و ۶ می‌توان تحول کیهان را با این فرض که پارامتر جفت شدگی گرانشی تابع نزولی از زمان است را بررسی کرد. برخی کمیت‌های مهم دیگر با استفاده از رابطه^۶ به صورت زیر تعریف می‌شوند، پارامتر کندشونددگی شتاب که عبارت است از:

$$q = -1 - \frac{\dot{H}}{H^2} \quad ۷$$

$$-1 + \frac{3\alpha(\rho + p)}{\rho(3\alpha - f) + 3(f - \alpha)p}$$

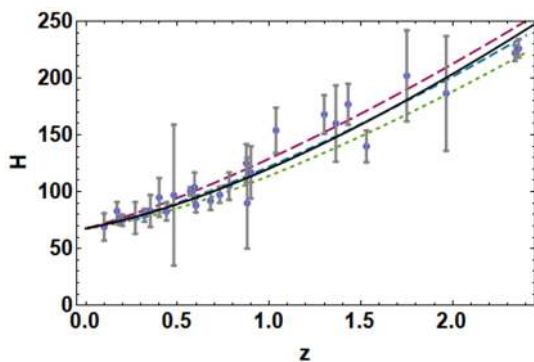
و پارامتر معادله حالت مؤثر^۱ که با پارامتر کندشونددگی شتاب به صورت $w_{eff} = (2q - 1)/3$ ارتباط دارد. در واقع پارامتر معادله حالت مؤثر از تشابه با GR به صورت $w_{eff} \equiv -1 - 2\dot{H}/3H^2$ تعریف می‌شود و در اینجا H از معادله^۶ به دست می‌آید. در روابط فوق ρ ، p و H به ترتیب چگالی و فشار ماده کیهانی و پارامتر هابل که به صورت $H = \dot{a}/a$ تعریف می‌شود، هستند. توجه داشته باشید که معادله حالت ماده کیهانی به صورت $w = p/\rho$ تعریف می‌شود که w در

³ Generalized Chaplygin gas

¹ Effective equation of state parameter

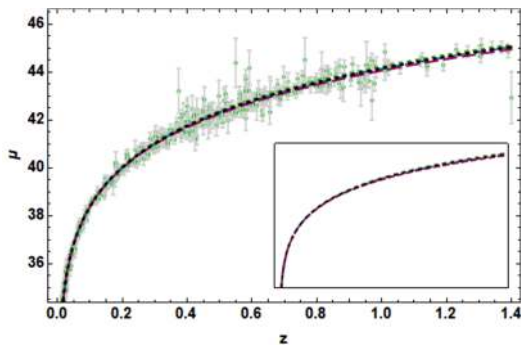
² Generalized polytropic equation of state (GPEoS)

همان‌طور که می‌بینیم رفتار معادله حالت GPEoS بیانگر یک توالی انبساط کند شونده به تند شونده است. در شکل ۳ تحول زمانی پارامتر هابل به‌ازاء همان مقادیر انتخاب شده در شکل ۱ به‌همراه داده‌های مربوط به پژوهش [۵۰] ترسیم شده است. در این شکل، منحنی به‌دست آمده از Λ CDM نیز برای مقایسه با رنگ سیاه ترسیم شده است.



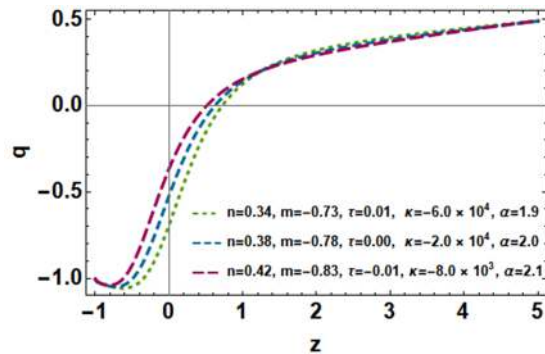
شکل ۳. پارامتر هابل با فرض GPEoS به‌ازای مقادیر شکل ۱. منحنی سیاه رنگ مربوط به Λ CDM است. همچنین از داده‌های [۵۰] استفاده شده است.

همچنین پارامتر مدول^۱ فاصله به‌همراه داده‌های [۵۱] در شکل ۴ به‌نمایش درآمده‌اند.



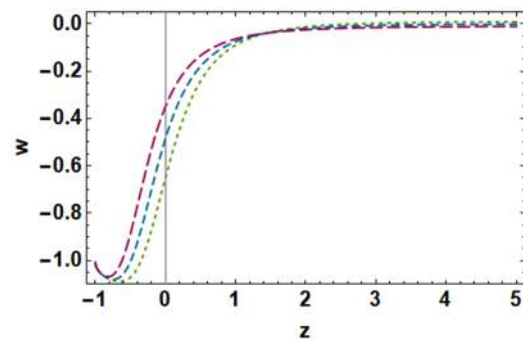
شکل ۴. پارامتر مدول فاصله با فرض GPEoS به‌ازای مقادیر شکل ۱ با استفاده از داده‌های [۵۱].

لازم به‌ذکر است که منحنی مدول فاصله برای Λ CDM نیز در شکل ۴ به‌رنگ سیاه رسم شده است که همان‌طور که دیده می‌شود هر چهار منحنی تقریباً تطابق دقیقی با هم دارند.



شکل ۱. منحنی‌های پارامتر کند شوندگی برای معادله حالت GPEoS.

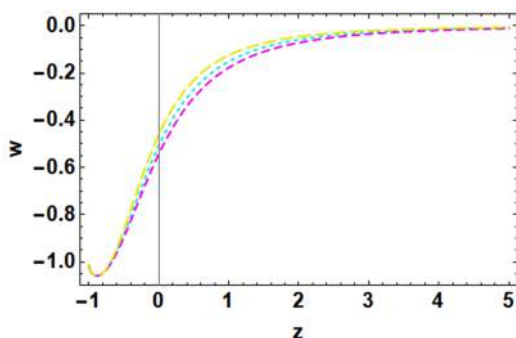
همان‌طور که مشاهده می‌شود، رفتار پارامتر کند شوندگی با نتایج مشاهدات نجومی [۴۷] همخوانی دارد؛ ماده GPEoS طوری رفتار می‌کند که در پارامتر انتقال به‌سرخ‌های بالا کیهان از یک دوره غالب با ماده غبار (که در آن کیهان شتاب انبساطی کاهشی دارد) تحول یافته، در یک مقدار پارامتر انتقال به‌سرخ $0.14 < z_{tr} < 1$ ، گذار به یک دوره انبساط شتابدار را آغاز می‌کند. در مرجع [۴۸] حداقل مقدار برای پارامتر انتقال به‌سرخ گذار برابر با $z_{tr} > 0.14$ و در مقاله [۴۹] مقدار حداکثری برابر با $z < 1$ ذکر شده است. کیهان در مدل حاضر مقدار کنونی پارامتر کند شوندگی $-0.6 < q_0 < -0.5$ را تجربه می‌کند. رفتار معادله حالت ماده به‌ازای همان پارامترهای آزاد انتخاب شده به‌صورت شکل ۲ می‌باشد.



شکل ۲. منحنی‌های معادله حالت GPEoS به‌ازای مقادیر شکل ۱.

¹ Distance modulus

به تند شونده در محدوده مشاهداتی قرار دارد و مقدار کنونی پارامتر نیز از منظر داده‌های رصدی قابل پذیرش است. در این مدل راستال تعمیم یافته، رفتار ماده چاپلین تعمیم یافته به صورت شکل ۶ می‌باشد.



شکل ۶. رفتار معادله حالت ماده GCG.

مطابق با شکل ۶ گاز چاپلین، در انتقال به سرخ‌های بالا رفتار یک ماده با فشار صفر را داشته و در انتقال به سرخ‌های پایین شبیه یک ماده با فشار منفی که عامل انبساط شتابدار است رفتار می‌کند. توجه به این نکته ضروریست که در نمودارهای ۱، ۲، ۵ و ۶ مقدار منفی برای پارامتر انتقال به سرخ طبق رابطه $a_0/a = 1+z$ متناظر با دوره‌های زمانی متناظر با $a > a_0$ است. بررسی سایر کمیت‌های مشاهداتی می‌تواند قضاوت در مورد مدل حاضر را بهبود ببخشد. شکل ۷ تحول زمانی

کیهان و معادله حالت چاپلین تعمیم یافته

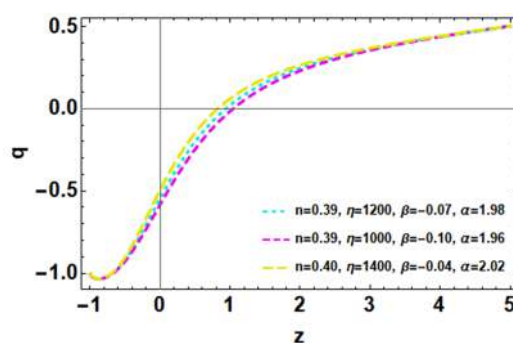
در این بخش به بررسی معادله حالت تعمیم یافته گاز چاپلین^۱ [۵۲] با رابطه:

$$p = -\frac{\eta}{\rho^\beta} \quad 10$$

می‌پردازیم که در آن η و β پارامترهای اختیاری هستند. گاز چاپلین تعمیم یافته حالت خاصی از گاز چاپلین (که به آن گاز استاندارد چاپلین هم می‌گویند) با معادله حالت $p = -K/\rho$ (با ثابت اختیاری K) است که ابتدا با هدف توجیه انرژی تاریک معرفی شده است [۵۲]. این مدل برخلاف مدل چند شکلی تعمیم یافته دارای چهار ثابت β ، η ، n و α است، که در معادله زیر با یکدیگر مرتبط هستند:

$$\alpha = \frac{\eta + H_0^2 (3H_0^2 \Omega_0)^\beta (2 + \Omega_0)}{\eta + (3H_0^2 \Omega_0)^{1+\beta}} \quad 11$$

توجه داشته باشید که مقدار کنونی تابع f عدد ۱ است که به توان n وابسته نیست، به این دلیل در روابط ۹ و ۱۱ ثابت n حضور ندارد. در شکل ۵ تابع پارامتر کند شونده برای مدل چاپلین تعمیم یافته ترسیم شده است.

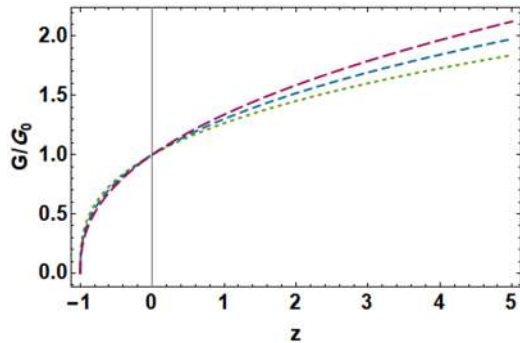


شکل ۵. پارامتر کند شونده وقتی ماده GCG مفروض است.

همان‌طور که از شکل ۵ دیده می‌شود رفتار پارامتر q دوره‌های مختلف کیهانی را به خوبی به نمایش می‌گذارد. پارامتر انتقال به سرخ گذار از دوره انبساط کند شونده

¹ Generalized Chaplygin gas (GCG)

در انتها، رفتار تابع f که در $G = G_0 f$ تعریف شده است در شکل ۹ برای مقادیر n مربوط به شکل ۱ ترسیم



شده است.

شکل ۹. رفتار تابع f برای مقادیر n موجود در شکل ۱.

لازم به ذکر است که نمودارهای (۱-۲) و (۵-۶) نشان می‌دهند در حد $z \rightarrow -1$ یا به طور معادل $a \rightarrow \infty$ (یعنی با توجه به رابطه ۷ و عبارت ذیل آن برای w_{eff} ، در حد مقادیر به اندازه کافی بزرگ پارامتر مقیاس در هر دو مدل، مستقل از مقادیر پارامترهای آزاد، نظریه Λ CDM بازیابی می‌شود (که به طور نظری داریم

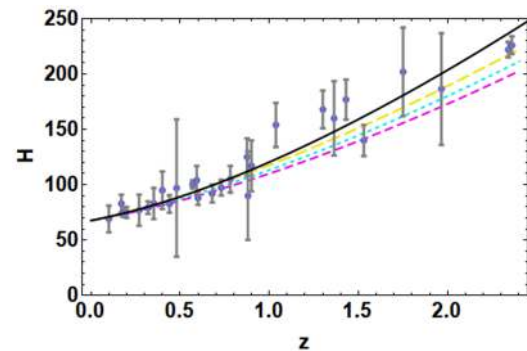
$$(w_{\Lambda CDM} = -1 = q_{\Lambda CDM}$$

در مقاله [۵۳] مطالعه مشابهی با حضور گاز و اندروالس^۱ با چهار پارامتر آزاد انجام شده است. نشان داده شده است که چنین انتخابی برای ماده کیهانی می‌تواند شرایط اولیه لازم برای یک انبساط شتابدار با فرض یک پارامتر جفت‌شدگی متغیر را ایجاد کند. به طور کلی انتخاب‌های دیگری برای ماده کیهانی ممکن است نتایج مشابهی را به همراه داشته باشند. بدیهی است که همه این نسخه‌ها نمی‌توانند مطلوب باشند. با بررسی‌های بیشتر نظیر مطالعه روی پاسخ‌های اختلالی یا آزمون‌های مرتبط با داده‌های نجومی می‌توان محدوده انتخاب‌های غیر قابل قبول را مشخص کرد.

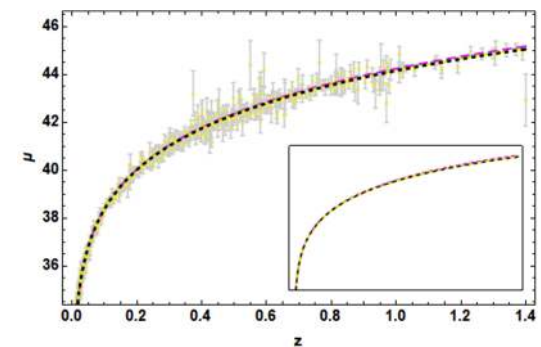
پارامتر هابل برای ثابت‌های درج شده در شکل ۵ را نمایش می‌دهد.

شکل ۷. پارامتر هابل وقتی ماده GCG مفروض است.

در شکل ۷ منحنی پیوسته سیاه، پارامتر هابل برای Λ CDM را نمایش می‌دهد. همان‌طور که می‌بینیم مدل راستال با فرض GCG، با افزایش انتقال به سرخ



نسبت به منحنی Λ CDM انحراف نشان می‌دهد. با اینکه رفتار پارامتر کند شونددگی با اطلاعات رصدی همخوانی دارد اما پارامتر هابل چنین ویژگی از خود نشان نمی‌دهد. مدول فاصله نیز در شکل ۸ ترسیم شده است.



شکل ۸. مدل فاصله در نظریه راستال تعمیم یافته با فرض ماده GCG.

همان‌طور که در شکل ۸ شاهد هستیم منحنی‌های مربوط به مدل تحت بررسی با منحنی مربوط به Λ CDM تطابق خوبی را به نمایش می‌گذارند.

¹ Van der Waals

اندازه گیری های پارامتر هابل

می توان به کمک داده های مربوط به مقدار پارامتر هابل، پارامترهای یک مدل را مقید کرد. بدین معنی که پارامترهای آزاد مدل به گونه ای به دست می آیند که مدل تحت بررسی با مشاهدات پارامتر هابل انطباق داشته باشد. برای این منظور تابع زیر را که در علم آمار و احتمال به تابع مجذور کای معروف است را کمینه می کنیم

۱۲

$$\chi_H^2(\varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_k) = \sum_{j=1}^N \frac{[H^O(z_j) - H^{th}(z_j)]^2}{\sigma_{H,j}^2}$$

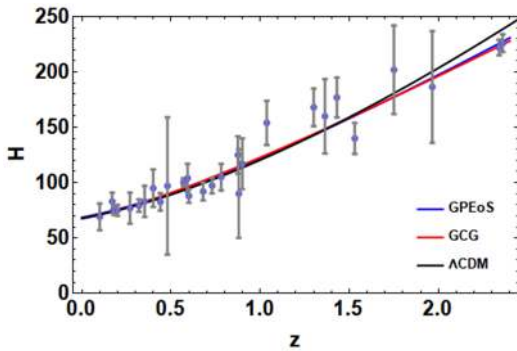
که نماد H در χ_H^2 به معنای این است که در تابع مجذور کای از داده های پارامتر هابل استفاده شده است، ϖ_i ها تعداد k پارامتر مستقل مدل هستند، N تعداد داده های مورد بررسی است، $\sigma_{H,j}$ خطای اندازه گیری داده j ام و H^O و H^{th} مقادیر پارامتر هابل به ترتیب به دست آمده از رصد و نظریه هستند. در مقاله حاضر، در مدل اول که از معادله حالت چند شکلی تعمیم یافته استفاده می کند چهار پارامتر از پنج پارامتر آزاد m ، n ، α ، k و τ مستقل هستند در نتیجه مقدار تابع مجذور کای، تابع مقدار چهار پارامتر است. کمینه کردن تابع کای که به این معنی است که به ازاء چه مقادیری از پارامترهای آزاد، مدل تحت بررسی بیشترین تطابق را با نتایج رصد پارامتر هابل دارد.

مطالعه حاضر تاکنون تنها محدود به بررسی پاسخ های کیهان شناسی با بررسی رفتار کمیت های کیهان شناسی در سطح زمینه بوده است. در تحلیل هر مدل کیهان شناسی برای دستیابی به یک قضاوت بهتر باید رفتار اختلالات نرده ای (که در بحث تشکیل ساختار کیهانی اهمیت دارد)، برداری و تانسوری (که با انتشار امواج گرانشی مرتبط است) را نیز مورد پژوهش قرار داد. در مقاله [۵۳]، همکاران نگارنده مقاله حاضر و ایشان رفتار اختلالات نرده ای چگالی ماده را در یک مدل GRG با پارامتر جفت شدگی ثابت بررسی کرده اند. در مقاله ذکر شده از یک توصیف فروپاشی متقارن کروی top-hat [۵۴] استفاده شده است. در پژوهش نامبرده، به جای انتخاب یک پارامتر راستال، با این فرض که تحول ماده کیهانی به صورت $\rho \propto a^{-3}$ است، پارامتر راستال به دست آمده است. در حوزه اختلالات خطی نشان داده شده است که به ازاء بازه ای از مقادیر پارامترهای آزاد مدل، دامنه اختلالات افزایش یافته به طوری که در یک انتقال به سرخ مشخص روند نزولی به خود می گیرد و در دوره کیهانی کنونی به مقدار ثابتی می رسند. در مقاله کنونی پارامتر جفت شدگی گرانشی ثابت نیست و بررسی های دوباره ای در حوزه اختلالات می تواند انجام پذیرد.

مقید کردن پارامترهای مدل های کیهان شناسی

تاکنون، مطالعه دو مدل معرفی شده صرفاً از منظر کاملاً نظری انجام شده است. به بیان دقیقتر، حوزه مقادیر مجاز برای پارامترهای دو مدل بیشتر از طریق یک مطالبه مبتنی بر پیش بینی های نظری مشخص شده اند. اما می دانیم که با مطالعه آماری روی داده های نجومی به دست آمده توسط گروه های مختلف رصدی، می توان پارامترهای آزاد یک مدل کیهان شناسی را اصطلاحاً مقید کرد. در اینجا چند روش متداول معرفی می شوند.

(به کمک دو معادله ۹ و ۱۱) و از این طریق مقادیر بهترین تطابق را برای آنها به دست آورد. در شکل ۱۰ منحنی مربوط به پارامتر هابل به‌ازاء مقادیر بهترین تطابق به دست آمده ترسیم شده‌اند.



شکل ۱۰. رفتار پارامتر هابل به‌ازاء مقادیر بهترین تطابق با داده‌های [۵۰].

اندازه‌گیری‌های فاصله درخشندگی

یکی دیگر از آزمون‌های کیهان‌شناسی یک مدل مقایسه مربوط به مقادیر فاصله درخشندگی به دست آمده از مدل با مقادیر به دست آمده از مشاهده‌های رصدی است. فاصله درخشندگی با داشتن تابع پارامتر هابل که از مدل نظری به دست می‌آید به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d_L(z) = \frac{c}{H_0} (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad 13$$

که در آن c سرعت نور است. در عمل در مشاهده ابرنواخترهای نوع یک به جای فاصله درخشندگی کمیت دیگری به نام مدول فاصله^۳، μ ، اندازه‌گیری می‌شود که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu(z) = m(z) - M = 25 + 5 \log\left(\frac{d_L(z)}{1 \text{ Mpc}}\right) \quad 14$$

که در آن $m(z)$ قدر ظاهری در انتقال به سرخ z و M قدر مطلق ابرنواختر است. با محاسبه تابع مدول فاصله مدل و داشتن یک مجموعه داده‌های رصدی،

بررسی‌های انجام شده^۱ روی ۲۸ داده رصدی مربوط به اندازه‌گیری مقدار پارامتر هابل [۵۰]، نشان می‌دهند که در مدل چند شکلی تعمیم یافته مقدار کمیته تابع مجذور کای $\chi^2_{H,GPEoS,min} = 19.53$ به‌ازاء مقادیر $\tau = 0.031$ ، $n = 0.072$ ، $m = -0.730$ ، $k = -5.09 \times 10^4$ و $\alpha = 1.98$ می‌باشد. به مقادیری که به‌ازاء آنها تابع مجذور کای کمیته می‌شود مقادیر بهترین تطابق^۲ می‌گویند. در نهایت معیاری که نشان می‌دهد مدل تحت بررسی تا چه میزان منطبق با داده‌های رصدی است کمیت $\chi^2_{H,min}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k) / d.o.f$ است که در آن $d.o.f = N - k$ است. در حالتی که $\chi^2_{H,min} / d.o.f \lesssim 1$ تطابق خوبی با نتایج رصدی دارد. در مدل با معادله حالت چند شکلی تعمیم یافته مقدار کمیت مذکور ۰.۸۱۴ می‌باشد. در مدل دوم که از معادله حالت گاز چاپلین تعمیم یافته استفاده می‌کند مقادیر بهترین تطابق عبارتند از $n = 0.0014$ ، $\beta = 0.6780$ ، $\eta = 6.249 \times 10^5$ که منجر به $\chi^2_{H,GCG,min} = 18.77$ می‌شوند. در این مدل سه پارامتر مستقل وجود دارد (به رابطه ۱۱ توجه کنید) که در نتیجه $\chi^2_{H,GCG,min}(n, \beta, \eta) / d.o.f = 0.751$ به دست می‌آید.

لازم به ذکر است که در بررسی انجام شده برای محاسبه مقدار α از دو معادله ۹ و ۱۱ و مقادیر $H_0 = 67.66$ و $\Omega_0 = 0.31$ برای مقادیر کنونی استفاده شده است. بدیهی است که در یک مطالعه جامع‌تر با استفاده از امکانات نرم‌افزاری و سخت‌افزاری مناسب می‌توان تابع مجذور کای را به دو پارامتر H_0 و Ω_0 وابسته کرد

² Best fit values

³ Distance modulus

۱ برای تحلیل‌های این بخش از مقاله، از بسته "CoChiSquare" "alpha" [۵۵] استفاده شده است که در فضای نرم افزار Mathematica [۵۶] و هم برنامه Python [۵۷] ارائه شده است.

ماده، به سمت خارج از توده‌های چگال ماده کیهانی، به وجود می‌آمده‌اند. بعد از دوره جدا شدگی، فوتون مسیر خود را از بقیه سوپ کیهانی اولیه جدا کرده و در نتیجه پوسته‌هایی از ماده باریونی در فاصله‌ای موسوم به افق صوتی^۴ از مرکز توده‌های اولیه و همچنین ماده تاریک در مرکز توده‌ها به جا می‌ماند. کهکشان‌ها، بعدها از این بقایا شکل می‌گیرند. توجه داشته باشید که به دلیل وجود توده‌های ماده متفاوت، افق‌های صوتی بسیاری شکل می‌گیرند. به این معنی که نمی‌توان با مشاهده مستقیم کهکشان‌ها، به سادگی، فاصله افق صوتی را محاسبه کرد. اینجاست که باید از روش‌های آماری استفاده کرد. BAO می‌تواند اندازه‌گیری‌های افق صوت را در دو دوره جدا شدگی و کنونی با هم مقایسه کند. در نتیجه از فیزیک نوسانات باریونی برای مطالعه انرژی تاریک و اثر شتاب انبساط کیهانی روی ساختار بزرگ مقیاس عالم استفاده می‌کنند. خواننده می‌تواند برای یک مطالعه جامع‌تر به مرجع [۵۹] مراجعه کند.

پارامتر جابه‌جایی تابش ریزموج کیهانی^۵

آزمون دیگری برای بررسی مدل‌های انرژی تاریک بررسی مقیاس زاویه‌ای افق صوتی در سطح آخرین پراکندگی^۶ است که در l_1^{TT} مربوط به مکان اولین قله طیف اختلال دمایی تابش زمینه کیهانی رمزگذاری شده است. این آزمون از طریق پارامتر جابه‌جایی توصیف می‌شود که تعریف زیر را دارد:

$$R = \frac{l_1^{TT}}{l_1^{TT}} \quad 16$$

در تعریف فوق عبارت واقع در صورت کسر مربوط به مدل تحت بررسی است و عبارت واقع در مخرج مربوط به مدل استاندارد ماده تاریک تخت با $\Omega_m = \Omega_b + \Omega_{dm} = 1$ (که Ω_b پارامتر چگالی ماده

مثلاً داده‌های منتشر شده در مرجع [۵۰] یا داده‌های پانتون^۱ [۵۸] که خود متشکل از ۱۸ گروه مختلف از داده‌ها است می‌توان بهره جست. تابع مجذور کای را که به صورت زیر تعریف می‌شود کمینه کرده و پارامترهای آزاد مدل را مقید نمود:

۱۵

$$\chi_\mu^2(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p) = \sum_{i=1}^{N'} \frac{[\mu^O(z_i) - \mu^{th}(z_i)]^2}{\sigma_{\mu,i}^2 - \sigma_{mz,i}^2}$$

که پراکندگی در اندازه‌گیری مدول فاصله و دیگر خطاهای دستگاهی در σ_{mz} به حساب آورده می‌شود. برخلاف ظاهر ساده روابط ۱۲ و ۱۵، در عمل در هنگام کار با آنها مشکلاتی وجود دارند. برای کمینه کردن توابع ۱۲ و ۱۵ ابتدا باید تابع پارامتر هابل از قبل مشخص باشد. در مرحله بعدی در رابطه ۱۳ انتگرال موجود در تعریف فاصله درخشندگی قابل حل باشد. در مدل‌های گرانشی تعمیم یافته مشکل اصلی این است که خود تابع پارامتر هابل به طور صریح به دست نمی‌آید و باید آن را به طور عددی محاسبه کرد (مشکلی در مقاله حاضر وجود دارد). نکته مهم بعدی تعداد پارامترهای آزاد مدل است که هر چه بیشتر باشد به پیچیدگی و زمان‌بر بودن محاسبه مقدار کمینه توابع ۱۲ و ۱۵ می‌افزاید. در غالب مسائل از این دست به رایانه‌هایی مجهز به پردازنده‌هایی قوی نیاز است.

اندازه‌گیری‌های نوسانات صوتی باریونی^۲

یکی دیگر از معیارهای انطباق کیهان‌شناسی یک مدل، ارزیابی آن از طریق اندازه‌گیری‌های نوسانات صوتی باریونی است. در دوره‌های ابتدایی تحول کیهان تا قبل از دوره جداشدگی ماده^۳، امواج فشاری ناشی از تعدیل دو نیروی گرانش مرکزگرا و نیروی خارج از مرکز ناشی گرمای آزاد شده در اندرکنش‌های فوتون-

⁴ Sound horizon

⁵ CMB shift parameter

⁶ Last scattering surface

¹ Pantheon+

² Baryon acoustic oscillations (BAO)

³ Matter decoupling

اولاً دوره کیهانی ماده بدون فشار در انتقال به سرخ‌های بالا قابل دسترس است و دوماً در انتقال به سرخ‌های پایین می‌توان انتظار یک فاز انبساط شتابدار را داشت. در این مدل، انتقال به سرخ گذار از فاز انبساطی کند شونده به تند شونده و همچنین مقدار کنونی پارامتر شونگی در محدوده اطلاعات رصدی قرار دارند. رفتار پارامتر هابل و مدول فاصله در این مدل علاوه بر اینکه با مدل Λ CDM همخوان است سازگاری قابل قبولی با اطلاعات نجومی نیز دارد.

در ادامه حضور ماده چاپلین تعمیم یافته مورد تحقیق قرار گرفت. حضور این ماده نیز می‌تواند کلیت قابل پذیرشی از تحول کیهانی را عرضه کند. با این حال، نشان داده شد که برای مقادیر خاصی از ثابت‌های این مدل، پارامتر هابل همخوانی کمتری با نتایج رصدی در انتقال به سرخ‌های بالاتر دارد.

در دو مدل مذکور رفتار ماده به‌گونه‌ای است که در انتقال به سرخ‌های بالا ماده بدون فشار نقش آفرینی می‌کند و در انتقال به سرخ‌های پایین ماده رفتاری مشابه انرژی تاریک دارد.

همچنین مقادیر بهترین تطابق برای پارامترهای آزاد هر دو مدل با استفاده از مقایسه آماری با ۲۸ داده رصدی منتشر شده در مرجع [۵۰] به دست آمده است. در مدل با معادله حالت چند شکلی تعمیم یافته که دارای ۴ پارامتر آزاد مستقل است مقدار نسبت کمینه تابع مجذور کای به درجات آزادی برابر با 0.814 و برای مدل گاز چاپلین تعمیم یافته این مقدار برابر 0.751 است.

برای یک بررسی جامع‌تر لازم است نتایج آزمون‌های دیگری نظیر فاصله درخشندگی، نوسانات صوتی باریونی و پارامتر انتقال تابش زمینه کیهانی را نیز به حساب آورد.

باریونی و Ω_{dm} پارامتر چگالی ماده تاریک را نشان می‌دهد. در عمل از رابطه زیر برای محاسبه پارامتر جابه‌جایی یک مدل استفاده می‌شود:

$$R^{th} = H_0 \sqrt{\Omega_{m0}} \int_0^{z_{rec}} \frac{dz'}{H(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p; z')} \quad 17$$

که در آن پارامتر انتقال به سرخ دوره بازترکیب است^۱ [۶۰]. مقدار رصدی پارامتر انتقال برابر است با $R^o \approx 1.749$ [۴۷]. در نتیجه برای یافتن قیدهایی روی پارامترهای آزاد مدل تابع مجذور کای به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\chi_{CMB}^2(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p) = \frac{[R^o - R^{th}]^2}{\sigma_R^2} \quad 18$$

دقت کنید که برای انجام چند آزمون مختلف، تابع مجذور کای برآیند که به صورت زیر تعریف می‌شود، باید کمینه شود:

$$\chi_{total}^2 = \sum_s \chi_s^2 \quad 19$$

در این بخش صرفاً به مقایسه آماری با داده‌های پارامتر هابل اکتفا شده است اما در یک مطالعه آماری جامع می‌توان مقادیر بهترین تطابق پارامترهای مدل‌های بررسی شده را از طریق آزمون‌های مطرح شده به دست آورد.

بحث و نتیجه‌گیری

طبق پیشنهاد دیراک، پارامتر جفت‌شدگی گرانشی در دوره‌های مختلف تحول کیهانی می‌توانسته مقادیر مختلفی را تجربه کرده باشد. در این راستا، در این مقاله نظریه راستال تعمیم یافته را وقتی پارامتر جفت‌شدگی گرانشی تابع نزولی از زمان است مورد بررسی قرار داده‌ایم. در این پژوهش ابتدا فرض شده است ماده چند شکلی تعمیم یافته، کیهان را فرا گرفته است. تحلیل نموداری مدل راستال تعمیم یافته با فرض جفت‌شدگی گرانشی متغیر و حضور ماده مذکور نشان می‌دهد که

¹ Recombination epoch

[8] S. Chandrasekhar, The Cosmological Constants, *Nature* **139** (1937) 757-758.
<https://doi.org/10.1038/139757b0>

[9] D.S. Kothari, Cosmological and Atomic Constants, *Nature* **142** (1938) 354-355.
<https://doi.org/10.1038/142354b0>

[10] K. Leszczyńska, M.P. Dąbrowski, T. Denkiewicz, Varying constants driven baryogenesis, *The European Physical Journal C* **79** (2019) 222.
<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-019-6744-1>

[11] G.F.R. Ellis, R. Maartens, M.A.H. Maccallum, *Relativistic cosmology*, Cambridge University Press, UK, (2012).
<https://www.cambridge.org/ir/academic/subjects/physics/cosmology-relativity-and-gravitation/relativistic-cosmology?format=HB&isbn=9780521381154>

[12] J.P. Uzan, The fundamental constants and their variation: observational and theoretical status, *Review of Modern Physics* **75** (2003) 403.
<https://doi.org/10.1103/RevModPhys.75.403>

[13] J.P. Uzan, Varying Constants, Gravitation and Cosmology, *Living Reviews in Relativity* **14** (2011) 2.
<https://doi.org/10.12942/lrr-2011-2>

[14] H. Moradpour, H. Shabani, A.H. Ziaie, Umesh Kumar Sharma, Non-minimal coupling inspires the Dirac cosmological model, *The European Physical Journal Plus* **136** (2021) 731.
<https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-021-01713-4>

[15] C. Brans, R.H. Dicke, Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation, *Physics Review* **124** (1961) 925.
<https://doi.org/10.1103/PhysRev.124.925>

در این پژوهش کوشش شد با در نظر گرفتن نظریه دیراک مدلی طراحی شود که بتواند رفتار تحولی کیهان را سازگار با مشاهدات، به نمایش بگذارد. بدیهی است مقاله حاضر خالی از اشکال نیست و تلاش در این راستا با بررسی سایر معیارهای نظری و کیهان‌شناسی می‌تواند ادامه داشته باشد.

مرجع‌ها

[1] P.A.M. Dirac, The Cosmological Constants, *Nature* **139** (1937) 323-324.
<https://doi.org/10.1038/139323a0>

[2] P.A.M. Dirac, A new basis for cosmology, *Proceedings of the Royal Society of London A* **165** (1938) 199.
<https://doi.org/10.1098/rspa.1938.0053>

[3] P.A.M. Dirac, Physical Science and Philosophy, *Nature* **139** (1937) 1001-1002.
<https://doi.org/10.1038/1391001a0>

[4] H. Weyl, Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie, *Annalen der Physics*, **59** (1919) 129.
<https://doi.org/10.1002/andp.19193641002>

[5] F. Zwicky, On the Theory and Observation of Highly Collapsed Stars, *Physical Review* **55** (1939) 726.
<https://doi.org/10.1103/PhysRev.55.726>

[6] A.S. Eddington, *The Mathematical Theory of Relativity*, Cambridge University Press, London, (1923).
<https://www.amazon.com/Mathematical-Theory-Relativity-S-Eddington/dp/0521091659>

[7] J.D. Barrow, F.J. Tipler, *The Anthropic Cosmological Principle*, Oxford University Press, Oxford, (1986).
<https://www.amazon.com/Anthropic-Cosmological-Principle-Oxford-Paperbacks/dp/0192821474/>

- a nonextensive setup, *Physical Review D* **96** (2017) 123504.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.123504>
- [25] R. Li et al., Constraining the Rastall parameters in static space-times with galaxy-scale strong gravitational lensing, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **486** (2019) 2407.
<https://doi.org/10.1093/mnras/stz967>
- [26] J.C. Fabris, R. Kerner, J. Tossa, Perturbative analysis of generalized Einstein's theories, *International Journal of Modern Physics D* **9** (2000) 111.
<https://doi.org/10.1142/S021827180000116>
- [27] A.S. Al-Rawaf, O.M. Taha, Cosmology of general relativity without energy-momentum conservation, *General Relativity and Gravitation* **28** (1996) 935.
<https://doi.org/10.1007/BF02113090>
- [28] C.E.M. Batista, J.C. Fabris, M. Hamani Daouda, Testing Rastall's theory using matter power spectrum, *Nuovo Cimento B* **125** (2010) 957.
<http://dx.doi.org/10.1393/ncb/i2010-10895-1>
- [29] G.F. Silva, O.F. Piattella, J.C. Fabris, L. Casarini, T.O. Barbosa, Bouncing solutions in Rastall's theory with a barotropic fluid, *Gravitation and Cosmology* **19** (2013) 156.
<https://doi.org/10.1134/S0202289313030109>
- [30] T.R.P. Caramês, M.H. Daouda, J.C. Fabris, A.M. Oliveira, O.F. Piattella, V. Stokov, The Brans–Dicke–Rastall theory, *The European Physical Journal C* **74** (2014) 3145.
<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-014-3145-3>
- [31] A.M. Oliveira, H.E.S. Velten, J.C. Fabris, L. Casarini, Neutron Stars in Rastall Gravity, *Physical Review D* **92** (2015) 044020.
- [16] R.H. Dicke, Mach's Principle and Invariance under Transformation of Units, *Physics Review* **125** (1962) 2163.
<https://doi.org/10.1103/PhysRev.125.2163>
- [17] R.H. Dicke, Principle of Equivalence and the Weak Interactions, *Review of Modern Physics* **29** (1957) 355.
<https://doi.org/10.1103/RevModPhys.29.355>
- [18] R.H. Dicke, Dirac's Cosmology and Mach's Principle, *Nature* **192** (1961) 440-441.
<https://doi.org/10.1038/192440a0>
- [19] P. Rastall, Generalization of the Einstein Theory, *Physics Review D* **6** (1972) 3357.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.6.3357>
- [20] A.S. Al-Rawaf, O.M. Taha, A resolution of the cosmological age puzzle, *Physics Letter B* **366** (1996) 69.
[https://doi.org/10.1016/0370-2693\(95\)01145-5](https://doi.org/10.1016/0370-2693(95)01145-5)
- [21] A.I. Arbab, Cosmological consequences of a built-in cosmological constant model, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **05** (2003) 008.
<https://doi.org/10.1088/1475-7516/2003/05/008>
- [22] A.M.M. Abdel-Rahman, M.H.A. Hashim, Gravitational lensing in a model with non-interacting matter and vacuum energies, *Astrophysics and Space Science* **298** (2005) 519.
<https://doi.org/10.1007/s10509-005-5839-3>
- [23] A.M.M. Abdel-Rahman, I.F. Riad, Flat Cosmology with Coupled Matter and Dark Energies, *The Astronomical Journal*, **134** (2007) 1931.
<https://doi.org/10.1086/521356>
- [24] H. Moradpour, A. Bonilla, E.M.C. Abreu, J.A. Neto, Accelerated cosmos in

- [39] H. Shabani, H. Moradpour, A.H. Ziaie, A dynamical system representation of generalized Rastall gravity, *Physics of Dark Universe* **36** (2022) 101047. <https://doi.org/10.1016/j.dark.2022.101047>
- [40] H. Moradpour, Y. Heydarzade, C. Corda, A.H. Ziaie, S. Ghaffari, Black hole solutions and Euler equation in Rastall and generalized Rastall theories of gravity, *Modern Physics Letter* **37** (2019) 1950304. <https://doi.org/10.1142/S0217732319503048>
- [41] K. Lin, W.-L. Qian, Cosmic evolution of dark energy in a generalized Rastall gravity, *The European Physical Journal C* **80** (2020) 561. <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-020-8116-2>
- [42] S. Maity, M. Biswas, U. Debnath, Analysis of entropy corrected holographic and new agegraphic dark energy models in generalized Rastall gravity, *International Journal of Modern Physics D* **35** (2020) 2050175. <https://doi.org/10.1142/S0217751X20501754>
- [43] A. Sardar, U. Debnath, Cosmological consequences of Rényi, Sharma–Mittal holographic and new agegraphic dark energy models in generalized Rastall gravity, *Modern Physics Letter A* **36** (2021) 2150180. <https://doi.org/10.1142/S0217732321501807>
- [44] H. Shabani, A.H. Ziaie, H. Moradpour, Einstein static universe and its stability in generalized Rastall gravity, *Annals of Physics* **444** (2022) 169058. <https://doi.org/10.1016/j.aop.2022.169058>
- [45] I. Noureen, S.A. Mardan, M. Azam, W. Shahzad, S. Khalid, Models of charged compact objects with <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.92.044020>
- [32] A.M. Oliveira, H.E.S. Velten, J.C. Fabris, Non-trivial static, spherically symmetric vacuum solution in a non-conservative theory of gravity, *Physical Review D* **93** (2016) 124020. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.93.124020>
- [33] K. Lin, W.-L. Qian, Neutral regular black hole solution in generalized Rastall gravity, *Chinese Physics C* **43** (2019) 083106. <https://doi.org/10.1088/1674-1137/43/8/083106>
- [34] A.H. Ziaie, H. Shabani, S. Ghaffari, Effects of Rastall parameter on perturbation of dark sectors of the Universe, *Modern Physics Letter A* **36** (2019) 2150082. <https://doi.org/10.1142/S0217732321500826>
- [35] H. Shabani, A.H. Ziaie, A connection between Rastall-type and $f(R,T)$ gravities, *Europhysics. Letter* **129** (2020) 20004. <https://doi.org/10.1209/0295-5075/129/20004>
- [36] H. Moradpour, Y. Heydarzade, F. Darabi, Ines G. Salako, A generalization to the Rastall theory and cosmic eras, *The European Physical Journal C* **77** (2017) 259. <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-017-4811-z>
- [37] D. Das, S. Dutta, S. Chakraborty, Cosmological consequences in the framework of generalized Rastall theory of gravity, *The European Physical Journal C* **78** (2018) 810. <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-018-6293-z>
- [38] A.H. Ziaie, Non-Singular gravitational collapse in generalized Rastall theory, *Journal of Research on Many body Systems* **10** (2020) 47-60. <https://dx.doi.org/10.22055/jrmbms.2020.15931>

- (2010) 712.
<https://doi.org/10.1088/0004-637X/716/1/712>
- [52] N. Bilić, G.B. Tupper, R.D. Viollier, Unification of dark matter and dark energy: the inhomogeneous Chaplygin gas, *Physics Letter B* **535** (2002) 17.
[https://doi.org/10.1016/S0370-2693\(02\)01716-1](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(02)01716-1)
- [53] A.H. Ziaie, H. Moradpour, H. Shabani, Structure formation in generalized Rastall gravity, *The European Physical Journal Plus* **135** (2020) 916.
<https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-020-00927-2>
- [54] K. Tomita, Formation of Gravitationally Bound Primordial Gas Clouds, *Progress in Theoretical Physics* **42** (1969) 9.
<https://doi.org/10.1143/PTP.42.9>
- [55] <https://github.com/CosmologyTaskForce/CoChiSquare/tree/alpha>.
[doi:10.5281/zenodo.13197](https://doi.org/10.5281/zenodo.13197)
- [56] <http://www.wolfram.com>
- [57] <https://www.python.org/psf>
- [58] D. Scolnic et al, The Pantheon+ Analysis: The Full Dataset and Light-Curve Release, arXiv: 2112.03863.
- [59] B.A. Basset, R. Hlozek, Baryon acoustic oscillations, arXiv: 0910.5224.
- [60] G. Hindshaw, et al., Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results, *Astrophysical Journal Supply* **208** (2013) 19.
<https://doi.org/10.1088/0067-0049/208/2/19>
- generalized polytropic equation of state, *The European Physical Journal C* **79** (2019) 302.
<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-019-6806-4>
- [46] S.A. Mardan, M. Rehman, I. Noureen, R.N. Jamil, Impact of generalized polytropic equation of state on charged anisotropic polytropes, *The European Physical Journal C* **80** (2020) 119.
<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-020-7647-x>
- [47] N. Aghanim, et al., Planck 2018 results: VI. Cosmological parameters, *Astronomy & Astrophysics* **641** (2020) A6.
<https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833910>
- [48] D. Muthukrishna, D. Parkinson, A cosmographic analysis of the transition to acceleration using SN-Ia and BAO, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **11** (2016) 052.
<https://doi.org/10.1088/1475-7516/2016/11/052>
- [49] N. Rania, D. Jainb, S. Mahajana, A. Mukherjeea, N. Pires, Transition redshift: new constraints from parametric and nonparametric methods, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **12** (2015) 045.
<https://doi.org/10.1088/1475-7516/2015/12/045>
- [50] O. Farooq et al., Hubble Parameter Measurement Constraints on the Redshift of the Deceleration-Acceleration Transition, Dynamical Dark Energy and Space Curvature, *Astrophysical Journal* **835** (2017) 26.
<https://doi.org/10.3847/1538-4357/835/1/26>
- [51] R. Amanullah et al., Spectra and Light Curves of Six Type Ia Supernovae at $0.511 < z < 1.12$ and the Union2 Compilation, *Astrophysical Journal* **716**