

# Synchronization and quantum correlation between two coupled dissipative Van der Pol oscillators

Saeide Delavari, Alidad Askari\*, Vahid Ameri Seyahoei

Department of Physics, Faculty of Science, Hormozgan University of Bandar Abbas, Hormozgan, Iran

Received: 04.11.2020 Final revised: 19.02.2023 Accepted: 08.05.2023

Doi: [10.22055/jrmbms.2023.18296](https://doi.org/10.22055/jrmbms.2023.18296)

## Abstract

The quantum synchronization and correlation have been studied between two coupled dissipative van der pol oscillators in a quantum system. Using the master equation approach, this study calculated mutual information, entanglement and synchronization error and investigated the effect of dissipative coupled on quantum synchronization and correlations of two coupled dissipative van der pol oscillators, considering the effect of temperature change in the squeeze states,. The results show that increasing the temperature in the squeeze states has a negative effect on the quantum synchronization and quantum correlation, while mutual information, which is the sum of classical and quantum correlations, indicates a decrease.

**Keywords:** Van der Pol Oscillators, Quantum Synchronization, Quantum Correlation, Coupled dissipative, Mutual information, Entanglement

---

\* Corresponding Author: [alidadaskari@gmail.com](mailto:alidadaskari@gmail.com)

## همگام‌سازی و همبستگی کوآنتومی بین دو نوسانگر جفت‌شده اتلافی

## واندرپیل

سعیده دلاوری، علیداد عسکری\*، وحید عامری سیاوهئی

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه هرمزگان، بندرعباس، ایران

دریافت: ۱۳۹۹/۰۸/۱۴ ویرایش نهائی: ۱۴۰۱/۱۱/۳۰ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۲/۱۸

Doi: [10.22055/jrmbms.2023.18296](https://doi.org/10.22055/jrmbms.2023.18296)

## چکیده

همگام‌سازی و همبستگی کوآنتومی بین دو نوسانگر جفت‌شده اتلافی و اندرپیل در سیستم کوآنتومی مورد مطالعه قرار گرفته است. با بهره‌گیری از رهیافت معادله اصلی، اطلاعات متقابل، درهم‌تنیدگی و خطای همگام‌سازی را محاسبه و اثر جفت‌شدگی اتلافی بر همگام‌سازی و همبستگی کوآنتومی دو نوسانگر جفت‌شده اتلافی و اندرپیل با تغییر دما در حالت چلانده را بررسی کرده‌ایم. نتایج نشان می‌دهد، افزایش دما در حالت چلانده، اثر منفی بر همگام‌سازی و همبستگی کوآنتومی داشته و در حالی که اطلاعات متقابل، که مجموع همبستگی‌های کلاسیکی و کوآنتومی می‌باشد، افزایش داده است.

**کلیدواژگان:** نوسانگرهای واندربیل، همگام‌سازی کوآنتومی، همبستگی کوآنتومی، جفت‌شدگی اتلافی، اطلاعات متقابل، درهم‌تنیدگی

## مقدمه

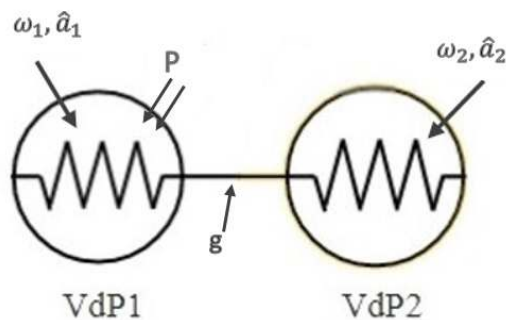
به‌صورت اتلافی با یکدیگر جفت شده‌اند، با در نظر گرفتن اثر دما در حالت چلانده،<sup>۲</sup> بررسی می‌کنیم. حالت چلانده، یک حالت کوآنتومی است که توسط دو مشاهده‌پذیر ناجابه‌جاپذیر برای طیف پیوسته ویژه‌مقادیر، توصیف می‌شود [۶]. همگام‌سازی در طیف گسترده‌ای از سامانه‌های فیزیکی، شیمیایی، بیولوژیکی تحت شرایط مختلف مشاهده شده است. همگام‌سازی، فرآیند سازگار شدن آهنگ اجسام نوسان‌کننده به علت برهم‌کنش ضعیف بین آنهاست [۷]. همگامی یک پدیده ذاتاً کلاسیکی است و در بسیاری از سامانه‌های کلاسیکی با ابعاد بزرگ به‌طور گسترده مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. این پدیده در مقیاس‌های کوآنتومی که با سامانه‌هایی با ابعاد کوچک سروکار داریم، نیز مشاهده شده است. برای بررسی همگامی

نوسانگر واندربیل در سال ۱۹۲۰، نخستین بار توسط بالتازار واندربیل، پیشنهاد شد [۱،۲]. نوسانگر واندربیل مدل ساده‌ای از یک سامانه دینامیک غیرخطی و ناپایستار با دو نوع میرایی است: میرایی منفی که وضعیت بقیه را ناپایدار می‌کند و میرایی غیرخطی که حرکت نوسانگر را به یک دامنه متناهی محدود می‌کند [۱].

همگام‌سازی، درهم‌تنیدگی، ناهمخوانی کوآنتومی<sup>۱</sup> و بسیاری دیگر از مفاهیم فیزیکی در نوسانگرهای جفت شده و اندرپیل توسط دانشمندان بسیاری مورد مطالعه قرار گرفته است [۵-۱]. ما در این مقاله همگام‌سازی و همبستگی کوآنتومی بین دو نوسانگر واندربیل که

\*نویسنده مسئول: alidadaskari@gmail.com

<sup>1</sup> Quantum discord<sup>2</sup> Squeeze



شکل ۱. نمای طرح‌واره دو نوسانگر جفت‌شده و اندرپیل ( $\omega_1, \hat{a}_1$ ) و ( $\omega_2, \hat{a}_2$ ) به ترتیب عملگر نابودی و فرکانس نوسانگر اول و دوم،  $P$  پمپ و  $g$  ضریب جفت‌شدگی اتلافی دو نوسانگر می‌باشد.

برای بررسی دینامیک این سامانه از روش حل معادله اصلی استفاده شده است [۱۰]. معادله اصلی، که برای سیستم‌های کوآنتومی باز استفاده می‌شود، برای سامانه مورد نظر ما به شکل زیر می‌باشد:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i[\hat{H}, \hat{\rho}] + \sum_{i=1}^2 \left[ \kappa(n_{th}) (2\hat{a}_i^\dagger \hat{\rho} \hat{a}_i - \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger) + \gamma(n_{th} + 1) (2\hat{a}_i^2 \hat{\rho} \hat{a}_i^{\dagger 2} - \hat{a}_i^{\dagger 2} \hat{a}_i^2 \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a}_i^{\dagger 2} \hat{a}_i^2) \right] + g(2\hat{c} \hat{\rho} \hat{c}^\dagger - \hat{c}^\dagger \hat{c} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{c}^\dagger \hat{c}) \quad ۱$$

که در آن  $\hbar = 1$  در نظر گرفتیم،  $\hat{\rho}$  ماتریس چگالی سیستم،  $n_{th} = (\exp(\frac{\hbar\omega}{K_B T}) - 1)^{-1}$  متوسط برهم‌انگیزختنی حمام گرمایی،  $\hat{a}_i$  و  $\hat{a}_i^\dagger$  به ترتیب عملگرهای خلق و فنا نوسانگرهای واندربیل و:

$$\hat{H} = \hat{H}_s + \hat{H}_p \quad ۲$$

همیلتونی کل سامانه است که از همیلتونی انرژی آزاد دو نوسانگر واندربیل:

$$\hat{H}_s = \sum_{i=1}^2 \omega_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \quad ۳$$

و همیلتونی پمپ چلانده:

$$\hat{H}_p = E(\hat{a}_1^2 + \hat{a}_2^{\dagger 2}) \quad ۴$$

تشکیل شده است.  $\omega_i$  فرکانس نوسانگرهای واندربیل و  $E$  شدت پمپ چلانده است.

معیارهایی مثل ضریب پیرسون<sup>۱</sup> و خطای همگام‌سازی، مورد استفاده قرار می‌گیرند [۸]. در این پژوهش ما از سنجه خطای همگام‌سازی برای بررسی همگامی اجزای سامانه مورد نظمان استفاده کرده‌ایم.

سنجه دیگری که در این پژوهش مورد استفاده قرار گرفته است، اطلاعات متقابل است. این معیار که نشان دهنده اطلاعات متقابلی است که دو زیر سامانه یک سامانه از هم دارند، مجموع همبستگی‌های کلاسیکی و کوآنتومی را در بر می‌گیرد. درهم‌تنیدگی که منشأ کوآنتومی دارد نیز می‌تواند معیاری برای بررسی همبستگی سامانه‌ها باشد.

در این پژوهش با استفاده از کمیت‌های درهم‌تنیدگی، اطلاعات متقابل و خطای همگام‌سازی، اثر جفت‌شدگی اتلافی بر همبستگی و همگام‌سازی کوآنتومی بین دو نوسانگر جفت‌شده و اندرپیل مورد مطالعه قرار گرفته است. بدین منظور بعد از معرفی سامانه مورد بررسی و دینامیک آن نخست دو نوسانگر جفت شده کوآنتومی واندربیل را بررسی کرده و معادله اصلی<sup>۲</sup> سیستم را بیان می‌کنیم، سپس اطلاعات متقابل، درهم‌تنیدگی و خطای همگام‌سازی را مطالعه کرده و در ادامه اثر جفت‌شدگی اتلافی بر همبستگی و همگام‌سازی کوآنتومی دو نوسانگر جفت‌شده اتلافی واندربیل را با در نظر گرفتن تأثیر دما در حالت چلانده، به کمک مجموعه کیوتیپ<sup>۳</sup> که جعبه ابزار کوآنتومی در زبان برنامه‌نویسی پایتون<sup>۴</sup> است، مورد مطالعه قرار داده و در پایان نتایج محاسبات را تحلیل و بررسی کرده‌ایم.

### دینامیک سامانه

سامانه کوآنتومی که در این پژوهش بررسی شده است، شامل دو نوسانگر کوآنتومی واندربیل که به صورت اتلافی به هم جفت شده‌اند، می‌باشد. شکل ۱ طرح‌واره‌ای از سامانه مورد نظر را نشان می‌دهد.

<sup>3</sup> Qutip

<sup>4</sup> Python

<sup>1</sup> Pearson correlation coefficient

<sup>2</sup> Master equation

همبستگی‌های کلاسیکی و کوانتومی است. استفاده از اطلاعات متقابل به‌عنوان یک سنجه‌ای برای همگامی، این امکان را به‌ما می‌دهد که تعامل بین همگامی و همبستگی بیشتر برای ما روشن شود و شاهدی بر حضور همگام‌سازی باشد [۲].

### درهم‌تنیدگی

درهم‌تنیدگی یکی از جذاب‌ترین پدیده‌های طبیعت و مفهوم کاملاً کوانتومی است که معادل کلاسیکی ندارد و در پدیده‌هایی مانند رمزگذاری کوانتومی، انتقال کوانتومی و محاسبات کوانتومی، که از مهم‌ترین ستون‌های نظریه اطلاعات کوانتومی هستند، نقش به‌سزایی دارد [۱۱].

در اوایل اطلاعات کوانتومی، درهم‌تنیدگی به‌عنوان اصلی‌ترین منبع رایانه در نظر گرفته می‌شد که سرعت بیشتری نسبت به هم‌تایان کلاسیک خود به سامانه‌های مرکب کوانتومی می‌بخشید [۱۲]. به‌زبان ساده‌تر می‌توان درهم‌تنیدگی را به‌معنای جفت شدن خواص مکانیکی دو ذره، ذراتی که در ابتدا با یکدیگر در تماس بوده و سپس از هم جدا شده‌اند تعریف کرد. اگر دو سیستم یک بار با هم برهم‌کنش داشته باشند، اگر از یکدیگر به‌فاصله زیاد هم دور شوند، اندازه‌گیری روی یکی از آنها تأثیر آنی و فوری در حالت دیگری ایجاد خواهد کرد. این اندرکنش‌ها مربوط به خواص فیزیکی، مانند: مکان، تکانه، اسپین، قطبش و غیره می‌باشد به‌گونه‌ای که با تعیین خواص فیزیکی برای یکی از دو ذره همان خاصیت در دیگری تعیین می‌شود. به‌عبارت دیگر هر یک از ذرات جفت شده به‌خوبی توسط حالت کوانتومی مشابه توصیف خواهد شد.

برای درهم‌تنیدگی معیارهای بسیاری تعریف شده است که با هم متفاوت هستند، این معیار یک عدد بین ۰-۱ است که مقدار ۱ حداکثر درهم‌تنیدگی و ۰ حداقل

در این معادله دو تا فرآیند اتلافی وجود دارد: به‌این‌صورت که نوسانگر یک فونون در لحظه با نرخ  $K$  به‌دست می‌آورد درحالی‌که دو تا فونون در لحظه با نرخ  $\gamma$  از دست می‌دهد. اینها به‌ترتیب به‌میزان میرایی منفی و میرایی غیرخطی مربوط می‌شوند. جمله آخر که شامل عملگر اتلافی  $\hat{C} = (\hat{a}_1 - \hat{a}_2)$  می‌باشد، منجر به جفت‌شدگی اتلافی بین دو نوسانگر و اندرپل می‌شود و  $g$  ثابت جفت‌شدگی اتلافی است.

کیوتیپ، قابلیت حل معادله اصلی را به‌صورت عددی دارد. با استفاده از ماتریس چگالی حاصل از حل معادله اصلی، می‌توان اطلاعات متقابل، درهم‌تنیدگی و همگامی بین دو نوسانگر اتلافی و اندرپل را به‌دست آورد.

### اطلاعات متقابل

برای یک حالت کوانتومی  $\hat{\rho}$  که متشکل از دو زیر سیستم با ماتریس‌های چگالی کاهش یافته  $\hat{\rho}_A = Tr_B(\hat{\rho})$  و  $\hat{\rho}_B = Tr_A(\hat{\rho})$  اطلاعات متقابل کوانتومی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I = S(\hat{\rho}_A) + S(\hat{\rho}_B) - S(\hat{\rho}_{AB})$$

۵

که  $S(\hat{\rho}) = -Tr[\hat{\rho} \log(\hat{\rho})]$  آنروپی ون نیومن است [۲].

در نظریه اطلاعات کلاسیک، اطلاعات متقابل، معیاری از میزان همبستگی بین دو متغیر تصادفی  $A$  و  $B$  است. معادله ۵ تعمیم مستقیم این مقدار به سیستم‌های توصیف شده توسط حالت‌های کوانتومی است. این تعمیم، به‌سادگی و با جایگزین کردن آنروپی شانون<sup>۱</sup> با آنروپی ون نیومن<sup>۲</sup>، صورت می‌گیرد [۲].

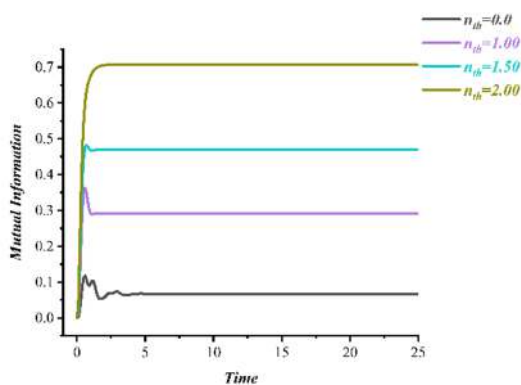
اطلاعات متقابل کوانتومی مقدار کل همبستگی را در یک سامانه را توصیف می‌کند و در برگیرنده مجموع

<sup>2</sup> Von Neumann entropy

<sup>1</sup> Shannon entropy

### نتایج محاسبات

اثر جفت‌شدگی اتلافی بر همبستگی کوآنتومی بارها مورد مطالعه قرار گرفته است و در بعضی سامانه‌ها، جفت‌شدگی اتلافی اثر مثبتی بر همبستگی کوآنتومی داشته و باعث بهبود همبستگی شده است [۳، ۱۵]. همچنین چلانندگی نیز می‌تواند باعث تقویت اطلاعات متقابل شود. در این پژوهش، ما با استفاده از ماتریس چگالی مستخرج از معادله اصلی ۱ و معادله ۵ مربوط به اطلاعات متقابل، مقدار اطلاعات متقابل بین دو نوسانگر و اندرپل را به‌ازای مقادیر مختلف  $n_{th}$  محاسبه و در شکل ۲ رسم کرده‌ایم. همچنین همین محاسبات را برای درهم‌تنیدگی براساس معادله ۷ انجام داده و تأثیر جفت‌شدگی اتلافی بر درهم‌تنیدگی را به‌ازای  $n_{th}$  متفاوت را در نمودار ۳ رسم نمودیم. همان‌طور که در شکل ۲ دیده می‌شود، تأثیر افزایش  $n_{th}$  بر اطلاعات متقابل افزایشی می‌باشد، درحالی‌که مطابق با شکل ۳ تأثیر آن بر درهم‌تنیدگی کاهش می‌باشد.



شکل ۲. نمودار مقایسه اطلاعات متقابل بین دو نوسانگر جفت شده اتلافی و اندرپل به‌ازای مقادیر مختلف  $n_{th}$  با پارامترهای  $\omega_1 = -\omega_2 = 7.0$ ،  $\gamma = 0.01$  و  $\kappa = 0.25$ ،  $E = 3.0$  و  $g = 0.90$ .

درهم‌تنیدگی را نشان می‌دهد. در این مقاله ما از معیار درهم‌تنیدگی لگاریتمی منفی برای سنجش درهم‌تنیدگی استفاده کرده‌ایم. لگاریتمی منفی<sup>۱</sup> به‌عنوان مرز بالایی برای میزان درهم‌تنیدگی قابل تفسیر است و به‌فرم زیر تعریف می‌شود [۱۳]:

$$E_N(\rho) \equiv \log \|\rho^{\Gamma_A}\|_1 \quad 6$$

که در اینجا،  $\Gamma_A$  عملگر انتقال جزئی و  $\|0\|_1$  اصل رد را نشان می‌دهد که به‌شرح زیر با منفی بودن ارتباط دارد:

$$E_N(\rho) := \log(2N+1) \quad 7$$

### خطای همگام‌سازی

خطای همگام‌سازی، می‌تواند میزان همگامی بین دو زیرسیستم را با استفاده از مکان و تکانه کوادراتورها اندازه‌گیری کند و برای اولین بار توسط ماری و همکاران [۱۴] برای بررسی همگام‌سازی کوآنتومی نوسانگرهای اپتومکانیک جفت شده برای دستیابی به چرخه حدی مجاز مورد استفاده قرار گرفت، این معیار به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

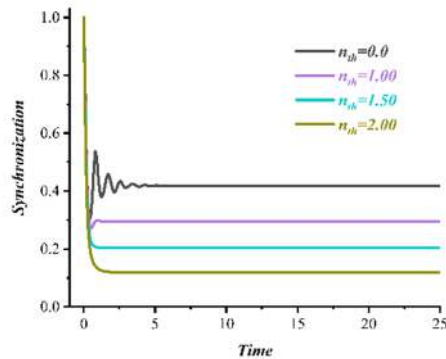
$$\hat{S}_c = \langle \hat{p}_-^2 + \hat{q}_-^2 \rangle^{-1} \quad 8$$

که در آن  $\hat{p}_- = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{2}}$ ،  $\hat{q}_- = \frac{\hat{q}_1 - \hat{q}_2}{\sqrt{2}}$  و

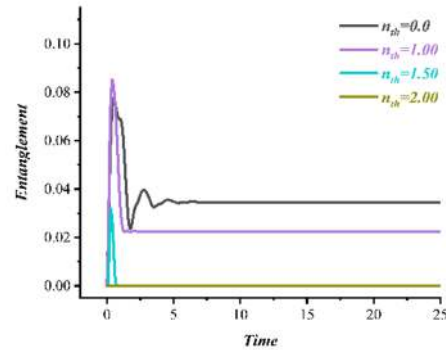
$\hat{p}_i = i \frac{\hat{a}_i^\dagger - \hat{a}_i}{\sqrt{2}}$ ،  $\hat{q}_i = \frac{\hat{a}_i + \hat{a}_i^\dagger}{\sqrt{2}}$  عملگرهای مکان و

تکانه می‌باشند. وقتی دو سیستم کاملاً همگام شده باشند در این صورت انتظار می‌رود که  $\hat{p}_-$  و  $\hat{q}_-$  به‌سمت صفر میل کند و مقدار بی‌نهایت را برای  $S_c$  داشته باشیم، ولی طبق اصل عدم قطعیت بیشترین مقداری که  $\hat{S}_c$  می‌تواند داشته باشد مقدار ۱ است.

<sup>1</sup> Logarithmic negativity



شکل ۴. نمودار مقایسه همگام‌سازی بین دو نوسانگر جفت شده اتلافی و اندرپل ازای مقادیر مختلف  $n_{th}$  با پارامترهای ذکر شده در شکل ۲.



شکل ۳. نمودار مقایسه درهم‌تنیدگی بین دو نوسانگر جفت شده اتلافی و اندرپل به‌ازای مقادیر مختلف  $n_{th}$  با پارامترهای ذکر شده در شکل ۲.

### بحث و نتیجه‌گیری

در این پژوهش، ما ارتباط همگام‌سازی و همبستگی کوآنتومی بین دو نوسانگر جفت شده اتلافی و اندرپل را با در نظر گرفتن اثر دما در حالت چلانده مطالعه کرده‌ایم. حضور دما و نویزهای محیطی در کوآنتوم برجسته‌تر از کلاسیک است و معمولاً باعث کاهش یا نابودی هم‌بستگی‌های کوآنتومی می‌شوند. بنابراین ما اثر جفت‌شدگی اتلافی با در نظر گرفتن تغییر دما به‌ازای مقادیر مختلف پارامتر  $n_{th}$ ، در حالت چلانده بررسی کرده و مشاهده کردیم که افزایش دما، بر میزان همگام‌سازی و درهم‌تنیدگی اثر منفی داشته و باعث کاهش آنها می‌شود اما اطلاعات متقابل را افزایش می‌دهد.

افزایش دما باعث افزایش شار انرژی و به‌تبع آن افزایش شار آنتروپی بین زیر سیستم‌ها می‌شود و در نتیجه اطلاعات متقابل افزایش می‌یابد. از سوی دیگر افزایش دما با افزایش نوفه در سیستم باعث کاهش همگامی و همبستگی‌های کوآنتومی می‌گردد.

در نتیجه می‌توان گفت، اطلاعات متقابل که به‌عنوان معیار همگامی کوآنتومی معرفی شده [۲]، تنها می‌تواند معیار مناسبی برای ارزیابی همگامی سامانه‌ها در دمای صفر باشد.

مطالعه اثر جفت‌شدگی اتلافی بر همگام‌سازی کوآنتومی نشان می‌دهد، در بعضی سیستم‌ها، جفت‌شدگی اتلافی اثر مثبتی بر همگام‌سازی کوآنتومی داشته و باعث بهبود همگامی شده است [۱۶، ۱]. همین‌طور چلانده‌گی باعث تقویت همگامی در برخی سامانه‌ها می‌شود [۱۷]. ما در این مقاله، تأثیر دما بر همگام‌سازی کوآنتومی بین دو نوسانگر جفت‌شده اتلافی و اندرپل را با استفاده از نرم‌افزار کیوتیب مطالعه کرده‌ایم. همانند اطلاعات متقابل و درهم‌تنیدگی ماتریس چگالی مستخرج از معادله اصلی به‌ازای  $n_{th}$  های مختلف را این بار در معادله ۸ مورد استفاده قرار داده و نتایج حاصل را در شکل ۴ ارائه داده‌ایم. همان‌گونه که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، اثر افزایش  $n_{th}$  بر همگامی همانند درهم‌تنیدگی کاهش می‌یابد.

052101.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.85.052101>
- [9] R. Dörner, V. Vedral, Correlations. Correlations in quantum physics, *International Journal of Modern Physics B* **27** 01n03 (2013) 1345017.  
<https://doi.org/10.1142/S0217979213450173>
- [10] T.E. Lee, C.K. Chan, S. Wang. Entanglement tongue and quantum synchronization of disordered oscillators, *Physical Review E* **89** 2 (2014) 022913.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.89.022913>
- [11] T. Symul and et al., Optical squeezing in temporal, polarization, and spatial domains, In *Fluctuations and Noise in Photonics and Quantum Optics, International Society for Optics and Photonics* **5111** (2003) 67-77.  
<https://doi.org/10.1117/12.497081>
- [12] M. Zukowski. Entanglement measures: State ordering vs. local operations, *Quantum Communication and Security* **11** (2007) 196.
- [12] M.B. Plenio, Logarithmic Negativity: A Full Entanglement Monotone That is not Convex. *Physical review letters* **95** 119902 (2005).  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.95.090503>
- [14] A. Mari, A. Farace, N. Didier, V. Giovannetti, R. Fazio. Measures of quantum synchronization in continuous variable systems, *Physical review letters* **111** 10 (2013) 103605.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.111.103605>
- [15] S.P. Vyatchanin, A.B. Matsko. Quantum speed meter based on dissipative coupling, *Physical Review A* **93** 6 (2016) 063817.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.93.063817>
- [16] G. Manzano, F. Galve, G.L. Giorgi, E. Hernández-García, R. Zambrini. Synchronization, quantum correlations and entanglement in oscillator networks, *Scientific Reports* **3** (2013) 1439.  
<https://doi.org/10.1038/srep01439>
- [17] S. Sonar, M. Hajdušek, M. Mukherjee, R. Fazio, V. Vedral, S. Vinjanampathy, L. wek. Squeezing Enhances Quantum Synchronization. *Physical review letters* **120** 163601 (2018).  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.163601>
- به‌نظر می‌رسد علیرغم ماهیت کلاسیکی پدیده همگامی، در سامانه مورد مطالعه همگامی و همبستگی‌های کلاسیک رفتاری کاملاً متفاوت دارند و همبستگی‌های کوآنتومی معیار مناسب‌تری برای همگامی ارائه می‌دهند.
- مرجع‌ها
- [1] S. Walter, A. Nunnenkamp, C. Bruder, Quantum synchronization of two Van der Pol oscillators, *Annalen der Physik* **527** 1-2 (2015) 131-138.  
<https://doi.org/10.1002/andp.201400144>
- [2] V. Ameri, M. Eghbali-Arani, A. Mari, A. Farace, F. Kheirandish, V. Giovannetti, R. Fazio. Mutual information as an order parameter for quantum synchronization, *Physical Review A* **91** 1 (2015) 012301.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.91.012301>
- [3] A.K. Rajagopal, R.W. Rendell. Decoherence, correlation, and entanglement in a pair of coupled quantum dissipative oscillators, *Physical Review A* **63** 2 (2001) 022116.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.63.022116>
- [4] T.E. Lee, H.R. Sadeghpour. Quantum synchronization of quantum van der Pol oscillators with trapped ions, *Physical review letters* **111** 23 (2013) 234101.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.111.234101>
- [5] F.F. Fanchini, D.D.O.S. Pinto, G. Adesso. *Lectures on General Quantum Correlations and their Applications*, Springer (2017) 159-179.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-319-53412-1>
- [6] C. Gerry, P. Knight, *Introductory Quantum Optics* Cambridge University Press (2004).  
<https://doi.org/10.1017/CBO9780511791239>
- [7] A. Pikovsky, J. Kurths, M. Rosenblum, J. Kurths, *Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences* **12** Cambridge university press (2003).  
<https://doi.org/10.1017/CBO9780511755743>
- [8] G.L. Giorgi, F. Galve, G. Manzano, P. Colet, R. Zambrini, Quantum correlations and mutual synchronization, *Physical Review A* **85** 5 (2012)