

Analytical determination of binding energy and magnetic moment of light single-lambda hypernuclei

Aida Armat, Seyed Mohammad Moosavi Nejad*, Mansour Farhadi

Faculty of Physics, Yazd University, P.O. Box 89195-741, Yazd, Iran

Received: 15.04.2023 Final revised:19.05.2023 Accepted: 10.07.2023

Doi link:[10.22055/jrmb.2023.18419](https://doi.org/10.22055/jrmb.2023.18419)

Abstract

Hypernuclei are known as the bound states of nucleons and one or more strange baryons (hyperons) so the development of their physics helps to understand the structure of nuclei and the properties of strange baryons with more precision. One important goal in the field of hypernucleus physics is the study of the interaction of hyperon-nucleon and hyperon-hyperon. In this regard, the study of hypernuclei structure can play an essential role in understanding these types of interactions. In this work, we study some important static properties of single-lambda hypernuclei (nuclei containing a Λ -baryon) such as their binding energy and magnetic moments. For our calculation, we use the Dirac relativistic wave equation considering a spin-orbit potential and determine the analytical equation of binding energy and magnetic moments. In the following, we will determine these quantities for some light hypernuclei such as ${}_{\Lambda}^{13}\text{C}$, ${}_{\Lambda}^{17}\text{O}$ and ${}_{\Lambda}^{41}\text{Ca}$. Our analytical results will be compared with other theoretical results as well as available experimental data.

Keywords: Hypernuclei, Hyperon, Magnetic moment, Binding energy

*Corresponding Author: mmoosavi@yazd.ac.ir



تعیین تحلیلی انرژی بستگی و گشتاور مغناطیسی هسته‌های هایپرونی

سبک تک لامبدا

آیدا آرمات، سید محمد موسوی نژاد*، منصور فرهادی

دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد، صندوق پستی ۷۴۱-۸۹۱۹۵، یزد، ایران

دریافت: ۱۴۰۲/۰۱/۲۶ ویرایش نهائی: ۱۴۰۲/۰۲/۲۹ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۴/۱۹

Doi link: [10.22055/jrmb.2023.18419](https://doi.org/10.22055/jrmb.2023.18419)

چکیده

هسته‌های هایپرونی سیستم‌های مقیدی از نوکلئون‌ها و یک یا چند باریون شگفت (هایپرون) هستند که توسعه فیزیک آنها به فهم بیشتر ساختار هسته و ویژگی‌های باریون‌های شگفت کمک می‌کند. یکی از اهداف مهم حوزه فیزیک هسته‌های هایپرونی بررسی برهم‌کنش هایپرون-نوکلئون و هایپرون-هایپرون است که در این زمینه، بررسی ساختار هسته‌های هایپرونی می‌تواند نقش اساسی در مطالعه این نوع برهم‌کنش‌ها بازی کند. ما در این کار به بررسی برخی از ویژگی‌های مهم استاتیکی هسته‌های هایپرونی تک لامبدا (هسته‌های شامل یک باریون شگفت Λ) مانند انرژی بستگی و گشتاور مغناطیسی آنها می‌پردازیم. برای انجام محاسبات، با استفاده از معادله موج نسبیتی دیراک و با در نظر گرفتن پتانسیل اسپین-مدار، معادله تحلیلی انرژی بستگی و گشتاور مغناطیسی هسته‌های هایپرونی را تعیین کرده و این مقادیر را برای برخی از هسته‌های هایپرونی سبک مانند ${}_{\Lambda}^{13}\text{C}$ ، ${}_{\Lambda}^{17}\text{O}$ و ${}_{\Lambda}^{41}\text{Ca}$ محاسبه کرده و با سایر نتایج تئوری و برخی از داده‌های آزمایشگاهی مقایسه خواهیم کرد.

کلیدواژگان: هسته‌های هایپرونی، هایپرون، گشتاور مغناطیسی، انرژی بستگی

مقدمه

در آزمایش اشعه کیهانی را مشاهده کردند که در این رویداد اولین واپاشی هسته هایپرونی اتفاق افتاد. از نظر تاریخی، تحقیق راجع به مراحل پیدایش هسته‌های هایپرونی از مطالعه روی اشعه‌های کیهانی شروع شد و در ادامه، کسب اطلاعات تکمیلی در مورد هسته‌های هایپرونی با کمک شتاب‌دهنده‌ها امکان‌پذیر شد [۲،۳]

در سپتامبر ۱۹۵۲ ماریان دانیسز^۱ و جرسی پنیوسکی^۲ از مشاهده یک واکنش ایجاد شده و متعاقباً واپاشی یک سیستم هسته‌ای جدید، اولین هسته هایپرونی^۳ (شامل هایپرون Λ) را کشف کردند [۱]. آنها یک رویداد قابل ملاحظه از اتفاقات ضبط شده در یک عکس امولسیون

*نویسنده مسئول: mmoosavi@yazd.ac.ir

¹Marian Danysz²Jerzy Pniewski³Hypernucleus

ρ ، k/k^* و ω حامل نیروهای برهم‌کنشی هایپرون-نوکلئون خواهند بود.

تاکنون به‌طور تجربی در امولسیون، تنها هسته‌های دو هایپرونی که در آنها هایپرون‌ها از یک نوع هستند، کشف شده‌اند [۶]. به‌علت اینکه انجام آزمایشات پراکندگی هایپرون-نوکلئون و هایپرون-هایپرون سخت می‌باشد لذا فهم ساختار هسته‌های هایپرونی یک نقش اساسی برای مطالعه این نوع برهم‌کنش‌ها را بازی می‌کند [۷،۸]. هسته‌های هایپرونی را می‌توان به‌کمک یک سری از ویژگی‌هاشان تا حد قابل قبولی توصیف کرد. این ویژگی‌ها به دو دسته استاتیکی و دینامیکی تقسیم می‌شوند. احتمال واپاشی هسته‌های هایپرونی و احتمال رخ دادن واکنش، مثال‌هایی از خواص دینامیکی و کمیت‌هایی مانند بارالکتریکی، شعاع مداری هایپرون، انرژی بستگی، جرم و گشتاور مغناطیسی نمونه‌هایی از خواص استاتیکی هایپرون‌ها هستند. در کار حاضر، از بین خواص استاتیکی هسته‌های هایپرونی به‌مطالعه تحلیلی انرژی بستگی و گشتاور مغناطیسی آنها خواهیم پرداخت. گشتاور مغناطیسی هسته‌های هایپرونی از این جهت کمیات مهمی هستند که حساس به‌ساختار تکانه زاویه‌ای مداری و اسپینی هستند و از همه مهم‌تر وابسته به برهم‌کنش‌های هایپرون-هسته (برهم‌کنش وابسته به اسپین) هستند که اطلاعات مستقیمی در مورد خواص هادرون‌های موجود در محیط هسته‌ای را ارائه می‌دهند. تاکنون مطالعات متفاوتی بر روی هسته‌های هایپرونی صورت گرفته است. به‌عنوان مثال، در مراجع [۹،۱۰] گشتاور مغناطیسی نوکلئون‌ها و هسته‌های هایپرونی Λ

که از جمله مهم‌ترین آنها آزمایشگاه جفرسون ($J\text{Lab}^1$) است که در این زمینه بسیار فعال است.

در تعریف، به هسته‌هایی شامل حداقل یک هایپرون هسته هایپرونی می‌گویند. هایپرون یک باریون شگفت مانند Λ ، Σ ، Ξ یا Ω است که شامل یک یا چند کوارک شگفت است. به‌عنوان مثال، هسته هایپرونی ${}^{\Lambda}_{\Lambda}C$ شامل ۱۲ باریون است که یکی از آنها هایپرون Λ (باریونی با ساختار $|uds\rangle$ ، بار الکتریکی صفر و عدد شگفتی -۱) است و عدد اتمی این هسته هایپرونی ۶ است (با توجه به برجسب C). در حالت عمومی، مشخصه عدد اتمی یک هسته هایپرونی بار الکتریکی سیستم است و نه ضرورتاً تعداد پروتون‌های آن، چرا که هایپرون‌ها نیز می‌توانند با خود بار الکتریکی حمل کنند. هسته‌های هایپرونی به‌عنوان آزمایشگاهی برای مطالعه برهم‌کنش‌های هایپرون-نوکلئون در نظر گرفته می‌شوند به‌گونه‌ای که هایپرون موجود در هسته به‌عنوان یک جستجوگر عمل می‌کند. مطالعه هسته‌های هایپرونی از جمله هسته‌های دو هایپرونی منبع مهمی از اطلاعات برای مطالعه نیروهای بنیادی بین هایپرون-هایپرون را فراهم می‌کند و دانشی است که برای فهم سازوکار برهم‌کنش باریون-باریون و ویژگی‌های برهم‌کنش قوی مهم می‌باشد [۴،۵]. به‌عنوان مثال می‌دانیم که جهت حفظ پایستگی ایزواسپین، برخلاف برهم‌کنش نوکلئون-نوکلئون، برهم‌کنش هایپرون-نوکلئون نمی‌تواند از طریق معاوضه یک پایون (مزون سبک) رخ دهد بلکه مزون‌های سنگین‌تری مانند

¹US Jefferson National Laboratory

تحلیلی محاسبات و همچنین پتانسیل برهم‌کنشی پرداخته، آنگاه معادله انرژی مقید هایپرون را تعیین خواهیم کرد. در ادامه، گشتاور مغناطیسی را توصیف کرده و سپس نتایج عددی را ارائه خواهیم داد و با سایر نتایج تئوری و داده‌های آزمایشگاهی مقایسه می‌کنیم. در انتها، به‌خلاصه و نتیجه‌گیری پژوهش خواهیم پرداخت.

چارچوب تحلیلی حل مسأله

معادله دیراک برای توصیف حرکت نسبیتی هایپرون موجود در هسته (تک باریون Λ) در دستگاه یکاهای طبیعی ($\hbar = c = 1$) به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$[\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta(\mu + U_s(r)) - E + U_v(r)]\Psi(r) = 0 \quad 1$$

که در آن، \vec{p} تکانه هایپرون و μ جرم کاهش یافته سیستم است: $\mu = m_A m_{cor} / (m_A + m_{cor})$. در اینجا m_A جرم هایپرون و m_{cor} جرم هسته است. همچنین $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ و β در معادله ۱ ماتریس‌های دیراک بوده و U_s و U_v معرف پتانسیل‌های اسکالر و برداری هستند. انرژی نسبیتی کل ذره Λ در هسته‌هایپرونی به‌صورت $E = \mu - B_\Lambda$ معرفی می‌شود که در آن B_Λ انرژی بستگی است.

برای حل معادله ۱، تابع موج را به‌صورت اسپینور دو مؤلفه‌ای دیراک به‌صورت:

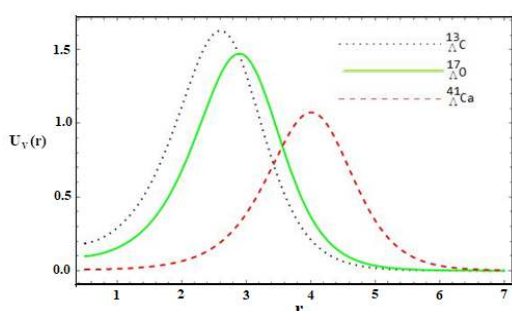
$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \chi_{nk}(\vec{r}) \\ i\phi_{nk}(\vec{r}) \end{pmatrix} \times Y(\theta, \varphi) \quad 2$$

در نظریه میدان نسبیتی مطالعه شده است. در مرجع [۱۱] گشتاور مغناطیسی هسته‌های هایپرونی آینه‌ای در مدل کوآرک هیبریدی مورد مطالعه قرار گرفته است. انحراف از مقدار اشمیت برای گشتاورهای مغناطیسی هسته‌های هایپرونی آینه‌ای موضوع مورد مطالعه در مرجع [۱۲] است. در کار حاضر برای انجام محاسبات از معادله موج نسبیتی دیراک برای توصیف هایپرون شروع خواهیم کرد که در آن با در نظر گرفتن پتانسیل برهم‌کنشی اسپین-مدار به‌حل تحلیلی معادله خواهیم پرداخت. به‌دلیل پیچیدگی معادله دیفرانسیل موج، برای رسیدن به معادله انرژی بستگی و به‌دست آوردن معادله تابع موج از روش ^1NU استفاده خواهیم کرد (پیوست را ملاحظه فرمائید). با داشتن مقادیر انرژی قیدی و تابع موج، به‌محاسبه گشتاور مغناطیسی هایپرون‌ها خواهیم پرداخت. جهت این محاسبه نیاز به محاسبه گشتاورهای مغناطیسی دیراک و آناملوس^۲ داریم. در نهایت، به‌کمک معادلات تحلیلی به‌محاسبه عددی انرژی بستگی و گشتاور مغناطیسی برخی از هسته‌های هایپرونی زوج-زوج مانند $^{13}_\Lambda\text{C}$, $^{17}_\Lambda\text{O}$ و $^{41}_\Lambda\text{Ca}$ (هسته‌های هایپرونی با تعداد زوج نوترون و تعداد زوج پروتون) پرداخته و نتایج را با داده‌های آزمایشگاهی موجود و سایر نتایج تئوری مقایسه خواهیم کرد. همخوانی خوبی بین نتایج ملاحظه می‌شود که مؤید صحت و اعتبار روش تحلیلی به‌کار گرفته شده در کارمان است. نوآوری و تازگی این پژوهش در ارائه یک روش تحلیلی برای تعیین خواص هسته‌های هایپرونی است. در این مقاله، ابتدا به معرفی چارچوب

² Anomalous

¹Nikiforov-Uvarov

در این رابطه $a = 0.743 \text{ fm}$, $U_{so} = 3.75 \text{ MeV}$ و $R = r_0 A^{1/3}$ بوده که در آن A تعداد باریون‌های موجود در هسته هایدرونی و $r_0 = 1.2 \text{ fm}$ می‌باشد. همچنین s, ℓ و j اعداد کوانتومی اسپینی، تکانه زاویه‌ای مدار و تکانه زاویه‌ای کل هستند. در شکل ۱ رفتار تابع پتانسیل ۶ بر حسب فاصله رسم شده است.



شکل ۱. رفتار پتانسیل $U_V(r)$ بر حسب r .

با در نظر گرفتن پتانسیل ۶، معادله ۵ به صورت زیر در می‌آید:

$$\chi''_{nk}(r) + \left[-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2(\mu+E)\eta_{so}e^{-\frac{r-R}{a}}}{r\left(1+e^{-\frac{r-R}{a}}\right)^2} \right] \chi_{nk}(r) = (\mu^2 - E^2)\chi_{nk}(r). \quad 8$$

حل تحلیلی معادله فوق پیچیده است. برای سادگی، از تقریب $1/r \approx e^{-r/a} / \omega_0$ استفاده می‌کنیم که در آن برای پارامتر قابل تنظیم ω_0 مقدار $\omega_0 = 0.348 \text{ fm}$ را به کار می‌بریم. لازم به ذکر است که مقدار تقریبی شعاع متوسط هسته‌های تک هایدرونی حالت پایه در محدوده $\langle r^2 \rangle^{1/2} = 1.2 - 1.6 \text{ fm}$ (بسته به مقدار عدد اتمی و نوع پتانسیل به کار برده شده) تخمین زده می‌شود [۱۴، ۱۵]. با این توضیح، در شکل ۲ رفتار این دو تابع در بازه $0.7 < r < 1.6 \text{ fm}$ مقایسه شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود برای بخش زیادی از محدوده تغییرات r تقریب فوق به خوبی برقرار است.

در نظر می‌گیریم. اکنون با جایگزینی اسپینور دیراک در معادله ۱ به دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول جفت شده زیر برای مؤلفه‌های اسپینوری می‌رسیم:

$$\begin{aligned} \chi'_{nk}(r) + \frac{k}{r} \chi_{nk}(r) &= (\mu + E - u_1) \phi_{nk}(r), \\ \phi'_{nk}(r) - \frac{k}{r} \phi_{nk}(r) &= (\mu - E + u_2) \chi_{nk}(r). \end{aligned} \quad 3$$

در روابط فوق، n عدد کوانتومی شعاعی و k معرف تکانه زاویه‌ای مدار نسبتی با مقادیر $k = \ell$ (به‌زای $k > 0$) و $k = -\ell - 1$ (به‌زای $k < 0$) است. همچنین پارامترهای u_1 و u_2 عبارت اند از:

$$\begin{aligned} u_1(r) &= U_V(r) - U_S(r), \\ u_2(r) &= U_V(r) + U_S(r). \end{aligned} \quad 4$$

با مشتق‌گیری از معادله ۳، برای معادله حاکم بر مؤلفه اسپینوری $\chi_{nk}(r)$ داریم:

$$\chi''_{nk}(r) + \left[-\frac{k(k+1)}{r^2} - (\mu + E - u_1(r))(\mu - E + u_2(r)) + \frac{du_1}{dr} \left(\frac{d}{dr} + \frac{k}{r} \right) \right] \chi_{nk}(r) = 0. \quad 5$$

در ادامه، پیرو مرجع [۱۳] با در نظر گرفتن تقارن اسپینی فرض $u_1 = 0$ را در نظر می‌گیریم. این فرض معادل است با: $U_V(r) = U_S(r)$. برای جمله برهم‌کنشی، پتانسیل اسپین-مدار را به صورت زیر در نظر می‌گیریم [۸]:

$$U_V(r) = -\frac{\eta_{so}}{r} e^{-\frac{r-R}{a}} \left(1 + e^{-\frac{r-R}{a}} \right)^{-2}, \quad 6$$

که در آن:

$$\eta_{so} = \frac{U_{so}}{a} [j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)]. \quad 7$$

$$\chi_{nk}''(z) + \frac{(1 - e^{-\frac{R}{a}z})}{z(1 - e^{-\frac{R}{a}z})} \frac{d\chi_{nk}(z)}{dz} + \frac{1}{z^2 \left(1 - e^{-\frac{R}{a}z}\right)^2} \{-Y_3 + Y_2z - Y_1z^2\} \chi_{nk}(z) = 0, \quad (12)$$

که ثابت‌های این معادله عبارت‌اند از:

$$Y_1 = \frac{e^{\frac{R}{a}} \ell(\ell+1)}{a^2 R^2} \left(\kappa_0 + (\kappa_2 + \kappa_1) e^{\frac{R}{a}} \right) + \frac{e^{\frac{R}{a}} (3\mu - B_\lambda)}{a^2} \left(B_\lambda - \mu - 2e^{\frac{R}{a}} \eta_{so} \right), \quad (13)$$

$$Y_2 = \frac{e^{\frac{R}{a}}}{a^2} \left(\frac{\ell(\ell+1)}{R^2} (\kappa_1 + 2\kappa_0) + 2(3\mu - B_\lambda)(B_\lambda - \mu + \eta_{so}) \right),$$

$$Y_3 = \frac{\ell(\ell+1)}{a^2 R^2} \kappa_0 + \frac{-2\mu(\mu - B_\lambda) - (\mu - B_\lambda)^2}{a^2}.$$

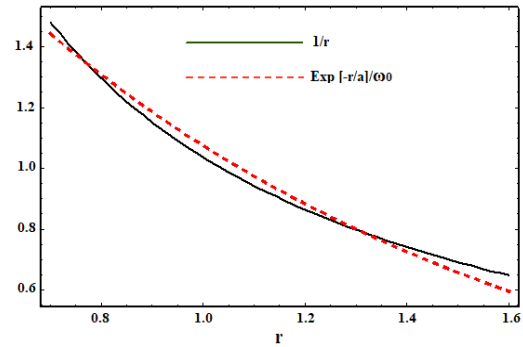
در رابطه فوق، B_λ انرژی بستگی^۲ هایپرون است. اکنون معادله دیفرانسیل ۱۳ به گونه‌ای است که می‌توانیم از روش تحلیلی NU (Nikiforov-Uvarov) استفاده کنیم و معادله انرژی بستگی و تابع موج را به دست بیاوریم [۱۷، ۱۸]. جزئیات این روش در پیوست داده شده است. با صرف نظر از جزئیات حل معادله، برای معادله انرژی ذره داریم:

$$(n^2 + n + \frac{1}{2})e^{\frac{R}{a}} + (2n+1) \left[\sqrt{e^{\frac{R}{a}} \left(-Y_2 + e^{\frac{R}{a}} \left(Y_3 + \frac{1}{4} \right) + Y_1 \right)} + e^{\frac{R}{a}} \sqrt{Y_3} \right] - Y_2 + 2e^{\frac{R}{a}} Y_3 + 2 \sqrt{Y_3 e^{\frac{R}{a}} \left(-Y_2 + e^{\frac{R}{a}} \left(Y_3 + \frac{1}{4} \right) + Y_1 \right)} = 0 \quad (14)$$

همچنین برای مؤلفه $\chi_{nk}(r)$ از اسپینور^۲ داریم:

$$\chi_{nk}(r) = \frac{N_0 (-e^{r/a})^{q_3}}{(1 + e^{r/a})^{q_3 + \frac{q_4}{q_3}}} P_n^{(q_1-1, \frac{q_2}{q_3} - q_1 - 1)} (1 + 2e^{r/a}), \quad (15)$$

که N_0 ضریب بهنجارش و $P_n^{\alpha, \beta}$ چند جمله ژاکوبی است که در آن n یک عدد صحیح است و α و β



شکل ۲. مقایسه رفتار دو تابع $1/r$ و $e^{-r/a}/\omega_0$

همچنین از تقریب پکریس^۱ [۱۶] به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{R^2}{r^2} \approx \kappa_0 + \frac{\kappa_1}{1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)} + \frac{\kappa_2}{\left(1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)\right)^2}. \quad (9)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \kappa_0 &= 1 - \frac{4a}{R} + 12 \frac{a^2}{R^2}, \\ \kappa_1 &= \frac{8a}{R} - 48 \frac{a^2}{R^2}, \\ \kappa_2 &= 48 \frac{a^2}{R^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

با قرار دادن تقریب‌ها در رابطه ۸، داریم:

$$\begin{aligned} \chi_{nk}''(r) + \left[-\frac{\ell(\ell+1)}{R^2} \left(\kappa_0 + \frac{\kappa_1}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}} + \frac{\kappa_2}{\left(1 + e^{\frac{r-R}{a}}\right)^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{2(\mu + E)\eta_{so}}{\omega_0 e^{\frac{r}{a}}} \times \frac{e^{\frac{r-R}{a}}}{\left(1 + e^{\frac{r-R}{a}}\right)^2} \right] \chi_{nk}(r) = (\mu^2 - E^2) \chi_{nk}(r). \end{aligned} \quad (11)$$

جهت حل معادله دیفرانسیل فوق، تغییر متغیر $z = -e^{r/a}$ را به کار می‌بریم. با صرف نظر از جزئیات مسئله، داریم:

^۱Pekeris

^۲ The binding energy

$$\mu_a = 2\mu_B j \Omega_k \int r^2 dr \left[\frac{\chi_{nk}^2}{2\ell_k + 1} + \frac{\phi_{nk}^2}{2\ell_{-k} + 1} \right], \quad 19$$

که به ازای $k < 0$ داریم: $\Omega_k = 1$ و $\ell_k = -k - 1$ و همچنین به ازای $k > 0$ داریم: $\Omega_k = -1$ و

$\ell_k = k$. در این کار، ما حالت $k > 0$ را بررسی خواهیم کرد. در رابطه ۱۹، $\mu_{B(n,p,\lambda)}$ ضریب

ژیرومغناطیسی باریون است که مقادیر آن برای پروتون، نوترون و لامبدا (برحسب واحد مگنتون هسته‌ای) برابر است با: $\mu_p = 1.793$ ، $\mu_n = -1.913$ و $\mu_\lambda = -1.613$

با قرار دادن مؤلفه‌های اسپینوری دیراک [۱۹]. (معادلات ۱۵ و ۱۷) در معادله ۱۹، برای گشتاور مغناطیسی μ_a داریم:

$$\mu_a = \frac{a\mu_B j \Omega_k \omega_0^2}{q_3 - 1} \left\{ \frac{1}{1 + 2\ell_{-k}} \varphi_1 - \frac{1}{1 + 2\ell_k} \left[-\frac{v_3^2}{2} \varphi_2 - v_3 v_2 \varphi_3 + v_3 v_1 \varphi_4 - \frac{v_2^2}{2} \varphi_5 + 2v_2 v_1 \varphi_6 \right] \right\} \quad 20$$

که پارامترهای ثابت $v_{i=1,2,3}$ عبارت‌اند از:

$$v_1 = \frac{(n-1) + q_2}{a(\mu+B)}, \quad v_2 = \frac{\frac{az\ell}{\omega_0} - q_3}{a(\mu+B)}, \quad v_3 = -\frac{q_3 + q_4}{a(\mu-B)} \quad 21$$

و جملات $\varphi_{i=1,\dots,6}$ شامل توابع ابرهندسی ${}_2F_1$ می‌باشند. این توابع عبارتند از:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= {}_2F_1[2(q_3 - 1), 2(q_3 + q_4), 2q_3 - 1, -1], \\ \varphi_2 &= {}_2F_1[2(q_3 - 1), 1 + q_3 + 2q_4, 2q_3 - 1, -1], \\ \varphi_3 &= {}_2F_1[2(q_3 - 1), 2(q_3 + q_4), 2q_3 - 1, -1], \\ \varphi_4 &= {}_2F_1[2(q_3 - 1), 2(q_3 + q_4), 2q_3, -1], \\ \varphi_5 &= {}_2F_1[2(q_3 - 1), 2(q_3 + q_4), 2q_3 - 1, -1], \\ \varphi_6 &= {}_2F_1[2q_3 - 1, 2(q_3 + q_4), 2q_3 - 1, -q_3]. \end{aligned} \quad 22$$

در رابطه فوق، ${}_2F_1$ تابع فوق هندسی گاوس است که به صورت سری‌های توانی همگرا بیان می‌شود. این توابع نتیجه حل معادلات دیفرانسیلی مرتبه دوم بوده که در آنها اندیس‌های ۱ و ۲ به ترتیب شمارنده تعداد

ثابت‌های بزرگتر از ۱- هستند. در رابطه فوق، پارامترهای ثابت عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} q_1 &= 1 + 2\sqrt{Y_3}, \\ q_2 &= 2\sqrt{-Y_2 e^{\frac{R}{a}} + (Y_3 + \frac{1}{4})e^{\frac{2R}{a}} + Y_1 + 2e^{\frac{R}{a}}(1 + \sqrt{Y_3})} \quad 16 \\ q_3 &= \sqrt{Y_3}, \\ q_4 &= -\frac{1}{2}e^{\frac{R}{a}} - e^{\frac{R}{a}}\sqrt{Y_3} - \sqrt{-Y_2 e^{\frac{R}{a}} + (Y_3 + \frac{1}{4})e^{\frac{2R}{a}} + Y_1} \end{aligned}$$

با جایگزین کردن معادله ۱۵ در معادله ۳، برای مؤلفه دوم اسپینور دیراک، $\phi_{nk}(r)$ داریم:

$$\begin{aligned} 17 \quad \phi_{nk}(r) &= \frac{N_0 (-e^{-\frac{r}{a}})^{q_3}}{a(2\mu - E)(1 + e^{-\frac{r}{a}})^{q_3 + q_4}} \times \\ &\left\{ -e^{r/a} (n - 1 + q_2) P_{n-1}^{(q_1, q_2 - q_1)}(1 + 2e^{-\frac{r}{a}}) \right. \\ &\left. - \left[\frac{(q_3 + q_4)}{(1 + e^{-\frac{r}{a}})} + q_3 + \frac{\ell a}{\omega_0 e^{\frac{r}{a}}} \right] P_n^{(q_1 - 1, q_2 - q_1 - 1)}(1 + 2e^{-\frac{r}{a}}) \right\}. \end{aligned}$$

در ادامه، به کمک اسپینور دیراک محاسبه شده (روابط ۱۵ و ۱۷) گشتاور مغناطیسی هایپرون را محاسبه خواهیم کرد.

گشتاور مغناطیسی

اصولاً، گشتاور مغناطیسی به ساختار اسپینی و تکانه زاویه‌ای هسته‌های هایپرونی و همچنین برهم‌کنش نوکلئون-هایپرون (وابسته به اسپین) حساس هستند. لذا گشتاور مغناطیسی هسته‌های هایپرونی یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های آنهاست که اطلاعات مستقیمی از برهم‌کنش‌های هایپرون-نوکلئون و ساختار هسته هایپرونی فراهم می‌کند. گشتاور مغناطیسی کل ذره به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۹]:

$$\mu = \mu_D + \mu_a \quad 18$$

که شامل گشتاور مغناطیسی‌های دیراک (μ_D) و نابهنجار (μ_a) می‌باشد. جمله μ_a به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۹]:

²Hypergeometric functions

¹Anomalous magnetic moment

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= {}_2F_1[5+2q_3, 1+2q_3 + \frac{2q_4}{q_3}, 2(3+q_3), -e^{R/a}], \\ \sigma_2 &= {}_2F_1[2(2+q_3), 1+2q_3 + \frac{q_4}{q_3}, 5+2q_3, -e^{R/a}], \\ \sigma_3 &= {}_2F_1[2(3+q_3), 1+2q_3 + \frac{2q_4}{q_3}, 7+2q_3, -e^{R/a}], \\ \sigma_4 &= {}_2F_1[7+2q_3, 1+2q_3 + \frac{2q_4}{q_3}, 2(4+q_3), -e^{R/a}], \\ \sigma_5 &= {}_2F_1[2(3+q_3), 2+2q_3 + \frac{2q_4}{q_3}, 7+2q_3, -e^{R/a}], \\ \sigma_6 &= {}_2F_1[2(1+N_3), (N_3 + \frac{N_4}{N_3}), 5+2N_3, -e^{R/a}]. \end{aligned}$$

در بخش بعد نتایج عددی محاسبات انرژی بستگی و گشتاور مغناطیسی هایپرون‌ها را ارائه خواهیم داد.

نتایج عددی

توضیح گشتاور مغناطیسی در چارچوب نسبیاتی توجهات زیادی را در فیزیک هسته‌ای به خود جلب کرده است چرا که گشتاور مغناطیسی هسته‌های هایپرونی حساس به ساختار تکانه زاویه‌ای مدار و اسپینی سیستم هستند و از همه مهمتر وابسته به برهم‌کنش‌های وابسته به اسپین هایپرون-هسته هستند که می‌تواند منبع مهم اطلاعات در مورد خواص هادرون‌های موجود در محیط هسته‌ای باشد. در این بخش به تحلیل عددی نتایج تحلیلی به دست آمده می‌پردازیم. مقدار ورودی پارامترهای مورد استفاده به جز پارامترهایی مانند a, U_{so}, r_0 و $\mu_{B(=n,p,\Lambda)}$ که در بخش‌های مختلف مقاله معرفی شدند، عبارت‌اند از $M_\Lambda = 1115.6 \text{ MeV}$, $M_n \approx M_p = 939.0 \text{ MeV}$ [۱۹]. $m_v = 784 \text{ MeV}$ و $\rho_0 = 0.14 \text{ fm}^{-3}$ اکنون با استفاده از معادله انرژی بستگی ۱۴ می‌توان انرژی بستگی (B_Λ) هایپرون Λ در هسته‌های هایپرونی را تعیین نمود. به طور کلی هایپرون موجود در یک هسته

پارامترها در صورت و مخرج سری ابرهندسی می‌باشند. گشتاور مغناطیسی دیراک (μ_D) در رابطه ۱۸ به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۹]:

$$\mu_D = -\frac{1}{2} \int r^2 dr \left(\phi_{nk}^2(r) - \chi_{nk}^2(r) - \frac{\Omega_k}{2\ell_k + 1} \phi_{nk}^2(r) - \frac{\Omega_k}{2\ell_k + 1} \chi_{nk}^2(r) \right) B_f(r) \quad ۲۳$$

که عبارت $B_f(r)$ است از:

$$B_f(r) = \frac{g_{\Lambda v} M_N}{g_{Nv} M_\Lambda} \times \left[1 + \frac{\sqrt{\left(\frac{3\pi^2}{2} \rho_0 \{1 + e^{(r-R)/a}\}^{-1} \right)^{2/3} + (M_N + U_s(r))^2}}{\lambda_{Nv} \rho_0 \{1 + e^{(r-R)/a}\}^{-1}} \right]^{-1} \quad ۲۴$$

که M_N و M_Λ جرم هایپرون لامبدا و نوکلئون بوده، همچنین $\lambda_{Nv} = g_{Nv}^2 / m_v^2$, $g_{Nv} = 13$, $g_{\Lambda v} / g_{Nv} = 2/3$ و $\rho_0 = 0.14 \text{ fm}^{-3}$ [۱۸]. نهایتاً، گشتاور مغناطیسی دیراک به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \mu_D &= N_0 \left(b_1 \frac{4kj\omega_0 M_\Lambda}{(4\ell^2 - 1)(\mu + B)} \left[-\frac{\Gamma_1 \nu_3^2}{3 + 2q_3} \sigma_1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{6\Gamma_2 \nu_3^2}{11 + 6q_3} \left(\frac{4kjM_\Lambda \omega_0 (q_2 - 1)}{(4k^2 - 1)\mu} \right) \sigma_2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{8\Gamma_3 \nu_2 \nu_3}{5 + 2q_3} \sigma_3 - \frac{\Gamma_1 \nu_1 \nu_3}{2 + q_3} \sigma_4 + \frac{4\Gamma_3 \nu_1 \nu_3}{3 + q_3} \sigma_5 - \frac{6\Gamma_2 \nu_1^2}{9 + 2q_3} \sigma_6 \right) \right. \end{aligned} \quad ۲۵$$

که $\Gamma_{i=1,2,3}$ و $b_1 = -(j/2)(1 - \Omega_k / (1 + 2\ell_{-k}))$ عبارتند از:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{g_{\Lambda v} M_N}{g_{Nv} M_\Lambda} - \frac{g_{\Lambda v} M_N^3 e^{-4R/3a}}{3^{1/3} (2\pi)^{2/3} g_{Nv} M_\Lambda \lambda_{Nv} \rho_0^{4/3}}, \\ \Gamma_2 &= \frac{\pi^{2/3} g_{\Lambda v} M_N e^{-4R/3a}}{g_{Nv} M_\Lambda \lambda_{Nv} \rho_0^{2/3}}, \\ \Gamma_3 &= \frac{(2/3)^{1/3} g_{\Lambda v} M_N^2 v_{cen}}{\pi^{2/3} g_{Nv} M_\Lambda \lambda_{Nv} \rho_0^{1/3} e^{-2R/3a}}, \end{aligned} \quad ۲۶$$

همچنین توابع $\sigma_{i=1, \dots, 6}$ در رابطه ۲۵ به صورت زیر تعریف شده‌اند:

پتانسیل برهم‌کنشی نوکلئون-هیپرون می‌تواند تأثیر مستقیمی روی نتایج و عدم تطابق کامل محاسبات با داده‌های آزمایشگاهی داشته باشد. در جداول ۲ و ۳ مقادیر عددی گشتاور مغناطیسی دیراک و گشتاور مغناطیسی کل هسته‌های هایپرونی تک لامبدا با تعداد نوکلئون زوج ارائه شده است و با نتایج تئوری مراجع [۲۳-۱۹,۲۱] مقایسه شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود با افزایش عدد اتمی، مقدار گشتاور مغناطیسی نیز افزایش می‌یابد. در مرجع [۱۹] با در نظر گرفتن فرم پتانسیل‌های تانسوری، اسکالر و برداری در معادله دیراک اثرات جفت‌شدگی تانسوری و قطبش هسته روی ممان مغناطیسی هسته‌های هایپرونی مطالعه شده است. مطابق با تعریف، پتانسیل تانسوری متناسب با گرادیان مؤلفه زمانی پتانسیل برداری در نظر گرفته می‌شود. در این مرجع برای توصیف برهم‌کنش هایپرون-نوکلئون از تابع پتانسیل Woods-Saxon استفاده شده است. توجه کنید که برای هسته‌های کروی مؤلفه‌های شبه-فضایی^۱ پتانسیل برداری صفر هستند [۲۰]. در مرجع [۱۹] نشان داده شده است که احتساب جمله جفت‌شدگی تانسوری^۲ در پتانسیل، مانع اثر قطبش هسته روی ممان مغناطیسی هسته‌های هایپرونی می‌شود. ضمن آنکه، چون توابع موج هایپرون حساس به پتانسیل تانسوری نیستند لذا ممان مغناطیسی‌ها با/بدون در نظر گرفتن این جملات یکسان خواهند شد. تفاوت کوچکی که بین نتایج ما و نتایج مرجع [۱۹] وجود دارد نتیجه مستقیمی از عامل جفت‌شدگی است که برای هایپرون لامبدا انتخاب شده است. در واقع در کار ما به دلیل پیچیدگی حل تحلیلی معادله دیراک از این جمله در پتانسیل برهم‌کنشی صرف‌نظر شده است. هرچند می‌توان با داشتن تابع موج سیستم^۲، این سهم‌های کوچک را به صورت غیراختلالی (با در نظر

باعث افزایش انرژی بستگی سیستم می‌شود زیرا نیروی موجود بین هایپرون-نوکلئون از نوع نیروی جاذبه است. نتایج محاسبات برای برخی از هسته‌های هایپرونی سبک مانند ${}_{\Lambda}^{13}\text{C}$, ${}_{\Lambda}^{17}\text{O}$ و ${}_{\Lambda}^{41}\text{Ca}$ به‌زای ترازهای انرژی $S(l=0)$ (حالت پایه) و $P(l=1)$ در جدول ۱ گزارش شده است و با داده‌های تجربی از مرجع [۲۰] مقایسه شده است. این داده‌های تجربی مربوط به هایپرون‌های سبک است که از مطالعات امولسیون به‌دست آمده‌اند.

جدول ۱. انرژی بستگی (B_{Λ}) هایپرون‌ها در هسته‌های هایپرونی مختلف (برحسب MeV).

هسته‌های هایپرونی	1s		1p	
	This work	Exp [۲۰]	This work	Exp [۲۰]
${}_{\Lambda}^{13}\text{C}$	۱۱,۴۶ ±۰,۲۲	۱۱,۶۹ ±۰,۱۲	۰,۸۷ ±۰,۱۵	۰,۸۰ ±۰,۰۷
${}_{\Lambda}^{17}\text{O}$	۱۲,۶۶ ±۰,۲۱	۱۳,۰۰ ±۰,۱۶	۲,۴۴ ±۰,۱۶	۲,۵۰ ±۰,۰۸
${}_{\Lambda}^{41}\text{Ca}$	۱۸,۵۳ ±۰,۸۷	۱۸,۷۰ ±۱,۱۰	۱۱,۱۲ ±۰,۴۵	۱۱,۰۰ ±۰,۱۲

همان‌طور که از جدول ۱ ملاحظه می‌شود، مطابق انتظار، انرژی بستگی هایپرون لامبدا واقع در تراز S همواره به‌مراتب بیشتر از تراز P می‌باشد. همچنین تطابق خوبی بین نتایج کارمان با داده‌های تجربی وجود دارد و عمده اختلاف بین نتایج می‌تواند ناشی از تقریب‌هایی باشد که در حل تحلیلی به‌کار گرفته‌ایم. جهت در نظر گرفتن خطای تقریب‌های به‌کار برده شده، معادله انرژی^۱ را به‌صورت عددی حل کرده و خطای محاسبات را در جدول ۱ لحاظ کرده‌ایم. ضمن آنکه انتخاب فرم تابع

²Tensor coupling

¹Space-like components

نتیجه گیری

اگرچه تاریخچه کشف هسته‌های هایپرانی به بیش از ۶۰ سال گذشته برمی‌گردد اما بیشتر آزمایشات و تحقیقات صورت گرفته بر روی این ذرات در سال‌های اخیر انجام شده است. اولین هسته هایپرانی از طریق مطالعه اشعه‌های کیهانی کشف شد که شامل هایپرون لامبدا (Λ) بود. هسته‌های هایپرانی اطلاعات مهمی برای مطالعه حالت ستاره‌های نوترونی فراهم می‌کنند [۲۳]. از جمله پژوهش‌های صورت گرفته بر روی این ذرات، مطالعه و بررسی انرژی بستگی [۲۴، ۲۵] و گشتاور مغناطیسی آن‌ها می‌باشد [۱۹]. گشتاورهای مغناطیسی هایپرسته‌ها یکی از مهمترین مشاهده‌پذیرهای فیزیکی می‌باشند و زمینه مطالعه ساختار و رفتار ذرات در یک میدان مغناطیسی را فراهم می‌کنند. با پیشرفت تکنیک‌های تجربی، علاقه به بررسی گشتاورهای مغناطیسی هسته‌های هایپرانی بیشتر شده است. در میان همه هسته‌های هایپرانی، مطالعه گشتاور مغناطیسی هسته‌های هایپرانی لامبدا از موارد جذاب است. به طور کلی گشتاور مغناطیسی هسته‌های هایپرانی از مجموع گشتاورهای نوکلئون‌ها و هایپرون‌ها به دست می‌آید. در نظریه‌های امروزی، گشتاور مغناطیسی نوکلئون‌ها و هایپرون‌ها را که از سه کوارک تشکیل شده‌اند مستقیماً از جمع گشتاورهای مغناطیسی کوارک‌ها به دست می‌آورند. در این کار، با در نظر گرفتن معادله نسبیتی دیراک برای هایپرون لامبدا موجود در هسته به محاسبه تحلیلی

گرفتن مقدار چشم‌داشتی تابع پتانسیل محاسبه نمود. در مرجع [۲۱] با استفاده از تئوری میدان میانگین نسبیتی^۱ مقادیر گشتاورهای مغناطیسی محاسبه شده است در حالی که در مرجع [۲۳] از یک مدل نسبیتی $\omega - \sigma$ در محاسبه این کمیات استفاده شده است. در این مرجع از جمله تانسوری برای توصیف برهم‌کنش $\omega - \Lambda$ استفاده شده است.

جدول ۲. گشتاور مغناطیسی دیراک ($\mu_D(10^{-4})$) (برحسب واحد مگنتون هسته‌ای)

هسته‌های هایپرانی	$1s_{1/2}$	Ref [۱۹]	$1p_{3/2}$	Ref [۱۹]	$1p_{1/2}$	Ref [۱۹]
$^{13}_\Lambda \text{C}$	-۳۹۸ ± ۲۳	-۳۹۵	-۳۲۵ ± ۲۶	-۳۲۲	-۲۲۰ ± ۲۸	-۲۱۵
$^{17}_\Lambda \text{O}$	-۴۸۷ ± ۳۶	-۴۸۳	-۵۰۷ ± ۴۱	-۵۰۳	-۳۷۵ ± ۲۹	-۳۶۹
$^{41}_\Lambda \text{Ca}$	-۷۰۶ ± ۳۹	-۷۰۱	-۶۴۵ ± ۳۱	-۶۴۰	-۵۵۰ ± ۴۱	-۵۴۶

به‌طور کلی گشتاور مغناطیسی یک هسته هایپرانی با تعداد زوجی از پروتون، نوترون و هایپرون صفر است. برای هسته هایپرانی با تعداد فردی از پروتون، نوترون و هایپرون، گشتاور مغناطیسی کل ترکیبی از گشتاور مغناطیسی ذرات جفت نشده خواهد بود. در حقیقت ذره فرد، تعیین کننده گشتاور مغناطیسی کل است. در این کار با توجه به تک هایپرانی بودن لامبدا در هسته هایپرانی، گشتاور مغناطیسی هسته هایپرانی بر اساس هایپرون لامبدا تعیین شده است.

¹Relativistic Mean Field Theory

حل تحلیلی کاملتری را برای انرژی بستگی هایپرون‌ها ارائه دهیم. در مراجع دیگر مانند مرجع [۲۷] از پتانسیل‌های متفاوتی مانند پتانسیل شبکه QCD برای مطالعه انرژی بستگی استفاده شده است

پيوست: روش NU

روش NU برای حل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم، چه شعاعی و چه غیر شعاعی کاربرد دارد [۱۷، ۱۸]. در این روش شکل کلی معادله دیفرانسیل به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{t_1 - t_2 r}{r(1 - t_3 r)} \frac{d}{dr} + \frac{1}{[r(1 - t_3 r)]^2} [-\sigma_1 r^2 + \sigma_2 r - \sigma_3] \right\} \psi = 0 \quad (\text{A.1})$$

با داشتن معادله دیفرانسیلی به شکل فوق معادله انرژی به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$t_2 n - (2n+1)t_5 + (2n+1)(\sqrt{t_9} + t_3 \sqrt{t_8}) + n(n-1)t_3 + t_7 + 2t_3 t_8 + 2\sqrt{t_8 t_9} = 0 \quad (\text{A.2})$$

در رابطه فوق n شمارنده تراز انرژی است. تابع موج نیز از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\psi(r) = r^{t_{12}} (1 - t_3 r)^{-t_{12} \frac{t_{13}}{t_3}} P_n^{(t_{10}-1, \frac{t_{11}-t_{10}-1}{t_3})} (1 - 2t_3 r) \quad (\text{A.3})$$

که $p_n^{a,b}$ چند جمله‌ای ژاکوبین است. پارامترهای روابط فوق عبارتند از:

$$\begin{aligned} t_4 &= \frac{1}{2}(1 - t_1) & , & & t_5 &= \frac{1}{2}(t_2 - 2t_3) \\ t_6 &= t_5^2 + \sigma_1 & , & & t_7 &= 2t_4 t_5 - \sigma_2 \\ t_8 &= t_4^2 + \sigma_3 & , & & t_9 &= t_3 t_7 + t_3^2 t_8 + t_6 \\ t_{10} &= t_1 + 2t_4 + 2\sqrt{t_8} \\ t_{11} &= t_2 - 2t_5 + 2(\sqrt{t_9} + t_3 \sqrt{t_8}) \\ t_{12} &= t_4 + \sqrt{t_8} \\ t_{13} &= t_5 - (\sqrt{t_9} + t_3 \sqrt{t_8}) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

معادله انرژی بستگی و گشتاور مغناطیسی هسته‌های هایپرونی با تعداد زوجی از پروتون و نوترون پرداختیم. پتانسیل برهم‌کنشی ذرات را به صورت پتانسیل اسپین-مدار در نظر گرفتیم (اگرچه در مراجع مختلف از فرم‌های پتانسیلی متفاوتی از جمله وودسکسون [۱۹] و نایمگن [۲۶] استفاده شده است). نتایج به دست آمده برای انرژی بستگی را با داده‌های تجربی مرجع [۲۰] و نتایج به دست آمده برای گشتاور مغناطیسی را با مقادیر به دست آمده از محاسبات تئوری ارائه شده در مراجع [۲۳-۲۱، ۱۹] مقایسه کردیم. در مرجع [۱۹] از فرم پتانسیل Woods-Saxon برای توصیف پتانسیل‌های برهم‌کنشی استفاده کرده‌اند. همچنین در مرجع [۲۱] با استفاده از تئوری میدان میانگین نسبی و در مرجع [۲۳] از یک مدل نسبی $\omega - \sigma$ استفاده شده است.

اختلاف ناچیزی که بین نتایج وجود دارد با در نظر گرفتن جملات دیگری در پتانسیل مانند، پتانسیل تانسوری، برهم‌کنش ایزواسپین-ایزواسپین، برهم‌کنش اسپین-ایزواسپین و پتانسیل مرکزی کمتر خواهد شد. لازم به ذکر است که در محاسبه تحلیلی از دو تقریب استفاده کرده‌ایم که عمده خطاهای محاسبات تئوریمان از این دو تقریب ناشی می‌شود. سعی کردیم با حل عددی معادلات انرژی خطای محاسبات را تخمین زده و در جداول ارائه دهیم. با این وجود همخوانی خوبی که بین نتایج دیده می‌شود صحت و اعتبار روش تحلیلی به کار گرفته در کارمان را نشان می‌دهد. برای به دست آوردن جواب دقیق‌تر لازم است اثر پتانسیل تانسوری نیز در محاسبات لحاظ گردد که البته منجر به پیچیدگی بیش از حد معادله دیراک خواهد شد. در آینده بنا داریم

جدول ۳. گشتاور مغناطیسی کل هسته‌های هایپرونی لامبدا (برحسب واحد مگنتون هسته‌ای)

هسته‌های هایپرونی	$1s_{1/2}$					$1p_{3/2}$					$1p_{1/2}$				
	This work	Ref [۱۹]	Ref [۲۱]	Ref [۲۲]	Ref [۲۳]	This work	Ref [۱۹]	Ref [۲۱]	Ref [۲۲]	Ref [۲۳]	This work	Ref [۱۹]	Ref [۲۱]	Ref [۲۲]	Ref [۲۳]
$^{13}_{\Lambda}C$	-۰٫۶۲۵ $\pm ۰٫۰۲۱$	-۰٫۶۵۱	-۰٫۶۵۰	-۰٫۶۵۸	-۰٫۶۱۱	-۰٫۶۴۰ $\pm ۰٫۰۱۹$	-۰٫۶۴۴	-۰٫۶۳۳	---	-۰٫۶۴۷	۰٫۱۸۰ $\pm ۰٫۰۱۵$	۰٫۱۸۴	۰٫۱۹۰	---	۰٫۱۸۷
$^{17}_{\Lambda}O$	-۰٫۶۳۵ $\pm ۰٫۰۳۳$	-۰٫۶۶۰	-۰٫۶۴۸	-۰٫۶۴۳	-۰٫۶۱۱	-۰٫۶۵۵ $\pm ۰٫۰۱۸$	-۰٫۶۶۲	-۰٫۶۴۴	---	-۰٫۶۵۵	۰٫۱۶۳ $\pm ۰٫۰۱۱$	۰٫۱۷۰	۰٫۱۷۹	---	۰٫۱۸۰
$^{41}_{\Lambda}Ca$	-۰٫۶۵۴ $\pm ۰٫۰۲۴$	-۰٫۶۸۲	-۰٫۶۶۵	-۰٫۶۵۶	-۰٫۶۱۳	-۰٫۷۰۵ $\pm ۰٫۰۳۱$	-۰٫۷۱۸	-۰٫۶۹۰	-۰٫۶۸۹	-۰٫۶۸۴	۰٫۱۵۰ $\pm ۰٫۰۱۱$	۰٫۱۵۳	۰٫۱۶۳	۰٫۱۶۵	۰٫۱۵۸

مرجع‌ها

[5] O. Hashimoto, H. Tamura, Spectroscopy of Λ hypernuclei, Progress in Particle and Nuclear Physics, 57 (2006) 564-653. doi:10.1016/j.pnnp.2005.07.001

[6] M. Rufa, J. Schaffner, J. Maruhn, H. Stöcker, W. Greiner, P.-G. Reinhard, Multi-lambda hypernuclei and the equation of state of hypermatter, Physical Review C, 42 (1990) 2469. doi:10.1103/PhysRevC.42.2469

[7] C. Cai, L. Li, Y. Tan, P. Ning, Could Λc^+ hypernuclei exist?, Europhysics Letters, 64 (2003) 448. doi:10.1209/epl/i2003-00610-x

[8] C. Barbero, A. Mariano, A. Samana, Shell model formalism for all hypernuclei types: A guide to solving the nonmesonic weak decay puzzle, Physical Review C, 78 (2008) 044324. doi:10.1103/PhysRevC.78.044324

[9] X. Liu, S.P. Maydanyuk, P.-M. Zhang, L. Liu, First investigation of hypernuclei in reactions via analysis of emitted bremsstrahlung photons, Physical Review C, 99 (2019) 064614. doi:10.1103/PhysRevC.99.064614

[10] S. Moosavi Nejad, A. Armat, Determination of hyperon properties through the variational method considering the hyperfine interaction, International Journal of Modern Physics E, 28

[1] M. Danysz, J. Pniewski, Delayed disintegration of a heavy nuclear fragment: I, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 44 (1953) 348-350. https://doi.org/10.1080/14786440308520318

[2] G. Bohm, J. Klabuhn, U. Krecker, F. Wysotski, G. Coremans, W. Gajewski, C. Mayeur, J. Sacton, P. Vilain, G. Wilquet, D. O'Sullivan, D. Stanley, D.H. Davis, E.R. Fletcher, S.P. Lovell, N.C. Roy, J.H. Wickens, A. Filipkowski, K. Garbowska-Pniewska, T. Pniewski, E. Skrzypczak, T. Sobczak, J.E. Allen, V.A. Bull, A.P. Conway, A. Fishwick, P.V. March, A determination of the binding-energy values of light hypernuclei, Nuclear Physics B, 4 (1968) 511-526. https://doi.org/10.1016/0550-3213(68)90109-0

[3] S. Gerasyuta, E. Matskevich, Twelve-quark hypernuclei with $A=4$ in a relativistic quark-gluon model, International Journal of Modern Physics A, 30 (2015) 1550157. doi:10.1142/S0217751X15501572

[4] H. Takahashi, J.K. Ahn, H. Akikawa, S. Aoki, K. Arai, S. Bahk, K. Baik, B. Bassalleck, J. Chung, M. Chung, Observation of a $H \Lambda \Lambda 6e$ Double Hypernucleus, Physical review letters, 87 (2001) 212502. doi:10.1103/PhysRevLett.87.212502

- [20] A. Gal, E. Hungerford, D. Millener, Strangeness in nuclear physics, *Reviews of Modern Physics*, 88 (2016) 035004. doi:10.1103/RevModPhys.88.035004
- [21] J. Cohen, R. Furnstahl, Hypernuclear currents in a relativistic mean-field theory, *Physical Review C*, 35 (1987) 2231. doi:10.1103/PhysRevC.35.2231
- [22] J. Mareš, J. Žofka, Hypernuclear magnetic moments, *Physics Letters B*, 249 (1990) 181-185. doi:10.1016/0370-2693(90)91239-8
- [23] A. Gattone, M. Chiapparini, E. Izquierdo, Λ -hypernuclei magnetic moments in a relativistic model, *Physical Review C*, 44 (1991) 548. doi:10.1103/PhysRevC.44.548
- [24] H. Tamura, R.S. Hayano, H. Outa, T. Yamazaki, Study of Λ -Hypernuclei with Stopped K^- Reaction, *Progress of Theoretical Physics Supplement* 117 (1994) 1-15. doi:10.1143/PTPS.117.1
- [25] N. Guleria, S.K. Dhiman, R. Shyam, A study of Λ hypernuclei within the Skyrme–Hartree–Fock model, *Nuclear Physics A*, 886 (2012) 71-91. doi:10.1016/j.nuclphysa.2012.05.005
- [26] M. Rentmeester, R. Timmermans, J. de Swart, Normalization of neutron-proton differential cross sections, *Physical Review C*, 64 (2001) 034004. doi:10.1103/PhysRevC.64.034004
- [27] F. Chezani Sharahi, M. Monemzadeh, A. Abdoli Arani, The Calculate of binding energy and wave function of tetraquark bbss from lattice QCD potential with analytically approach, *Journal of Research on Many-body Systems*, 9 (2020) 77-85. [In Persian] doi:10.22055/JRMS.2020.15329
- (2019) 1950087. doi:10.1142/S0218301319500873
- [11] H.-F. Lü, Y.-Y. Liu, The Role of One Single Lambda Hyperon on Binding Energy Difference of Hypernuclear Mirror Pair, *Communications in Theoretical Physics*, 64 (2015) 525-528. doi:10.1088/0253-6102/64/5/525
- [12] H. Sang, X. Wang, H. Lü, J. Yao, H. Sagawa, Magnetic moments of Λ hypernuclei within the time-odd triaxial relativistic mean-field approach, *Physical Review C*, 88 (2013) 064304. doi:10.1103/PhysRevC.88.064304
- [13] N. Kolesnikov, S. Kalachev, Binding energies of hypernuclei and Λ N interaction, *Physics of Atomic Nuclei*, 69 (2006) 2020-2033. doi:10.1134/S1063778806120052
- [14] A. Armat, S. Mohammad Moosavi Nejad, Ground state binding energies and RMS radii of Λ in hypernuclei in the presence of spin-dependent potential, *International Journal of Modern Physics E*, 28 (2019) 1950011. doi:10.1142/S0218301319500113
- [15] S.M.M. Nejad, A. Armat, Relativistic excited state binding energies and RMS radii of Λ -hypernuclei, *Modern Physics Letters A*, 33 (2018) 1850022. doi:10.1142/S0218301319500113
- [16] C. Pekeris, The rotation-vibration coupling in diatomic molecules, *Physical Review*, 45 (1934) 98. doi:10.1103/PhysRev.45.98
- [17] M. Farhadi, S.M. Moosavi Nejad, A. Armat, Analytical Determination of Mass and Magnetic Moment of Baryons in Diquark Model, *Few Body Syst.* 64 (2023) 3, 76. doi:10.1007/s00601-023-01854-5
- [18] S.M.M. Nejad, A. Armat, Analytical solution for magnetic moments of Λ -hypernuclei in a relativistic approach, *International Journal of Modern Physics E*, 28 (2019) 1950033. doi:10.1142/S0218301319500332
- [19] Y. Jiang-Ming, L. Hong-Feng, H. Greg, M. Jie, Core polarization and tensor coupling effects on magnetic moments of hypernuclei, *Chinese Physics Letters*, 25 (2008) 1629. doi:10.1088/0256-307X/25/5/029