

Stability and bifurcation analysis of nonlinear ion-acoustic waves in superthermal electron-positron-ion plasmas

Mostafa Mehdipoor*

Department of Physics, Faculty of Science, Gonbad Kavous University, Gonbad Kavous, Iran

Received: 14.04.2023 Final revised: 28.06.2023 Accepted: 16.07.2023

DOI: [10.22055/jrmbms.2023.18420](https://doi.org/10.22055/jrmbms.2023.18420)

Abstract

In this study, the stability and bifurcation analysis of nonlinear ion-acoustic waves is investigated in a non-Maxwellian plasma consisting of cold ions and Kappa-distributed electrons and positrons. First, a characteristic equation for the evolution of ion-acoustic waves is obtained and then the stability of traveling wave solution on fixed points-energetic positron density plane is discussed numerically. It is found that the motion dynamics of homoclinic orbits and nonlinear periodic orbits undergo a transcritical bifurcation at the critical positron density p_c , where two fixed points coalesce, and then switch their stabilities. The variations of the initial p_i and critical p_c positron concentrations versus a wide range of values of the spectral index of positrons κ_p and electron-to-positron temperature ratio δ are also studied. Furthermore, according to the phase portraits analysis, the coexistence of homoclinic orbits, nonlinear periodic, and super nonlinear periodic orbits is also investigated for different conditions. It is shown that the positron density and the temperature ratio of electron to positron play a crucial role in the propagation of nonlinear waves.

Keywords: Ion-acoustic waves, Bifurcation analysis, Superthermal plasmas, Phase portrait.

* Corresponding Author: mehdipoor.m59@gmail.com

پایداری و تحلیل دوشاخگی امواج یون-صوتی غیرخطی در الکترون-پوزیترون-یون پلاسماهای فوق حرارتی

مصطفی مهدی پور*

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه گنبد کاووس، گنبد کاووس، ایران

دریافت: ۱۴۰۲/۰۱/۲۵ ویرایش نهائی: ۱۴۰۲/۰۴/۰۷ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۴/۲۵

DOI: [10.22055/jrmb.2023.18420](https://doi.org/10.22055/jrmb.2023.18420)

چکیده

در این پژوهش، پایداری و تحلیل دوشاخگی امواج غیرخطی یون-صوتی در یک پلاسما شامل یون‌های سرد، الکترون‌ها و پوزیترون‌های غیرماکسولی (با توزیع کاپا) بررسی شده است. در ابتدا، یک معادله مشخصه برای دینامیک امواج یون-صوتی تعیین و سپس پایداری امواج در حال حرکت در فضای پارامتری نقاط تعادل و چگالی پوزیترون‌ها مورد بحث قرار گرفته است. مشخص می‌شود که حرکت دینامیکی مدارهای هموکلینیک و مدارهای دوره‌ای غیرخطی به‌ازای یک مقدار بحرانی چگالی پوزیترون p_c تحت دوشاخگی قرار می‌گیرند، طوری که دو نقطه ثابت بهم برخورد می‌کنند و سپس پایداری آنها تغییر می‌کند. تغییرات چگالی اولیه p_i و بحرانی پوزیترون‌ها p_c ، برحسب طیف گسترده‌ای از مقادیر شاخص طیفی پوزیترون‌ها K_p و نسبت دمای الکترون‌ها به پوزیترون‌ها δ نیز مورد مطالعه قرار گرفته است. علاوه بر این، بر طبق تحلیل فضای فاز، وجود مدارهای هموکلینیک، مدارهای دوره‌ای غیرخطی و همچنین تناوبی با دامنه بالا نیز برای شرایط مختلف بررسی شده است. نشان داده شده است که چگالی پوزیترون‌ها و نسبت دمای الکترون به پوزیترون نقش مهمی در انتشار امواج غیرخطی دارند.

کلیدواژگان: امواج یون-صوتی، تحلیل دوشاخگی، پلاسماهای فوق حرارتی، فضای فاز

مقدمه

وجود امواج یون-صوتی را به‌صورت آزمایشگاهی ثابت کرده بودند. از نظر تئوری نیز ساختار این امواج با روش‌های مختلفی قابل بررسی هستند. یکی از مرسوم‌ترین روش‌ها، روش اختلال کاهشی می‌باشد. این روش در محدوده غیرخطیت ضعیف و برای امواج با طول موج بلند بسیار حائز اهمیت می‌باشد و معمولاً به معادله غیرخطی کورته‌وگ-ده‌وری ($K-dV$) منجر می‌شود [۳-۴]. حل نوعی این معادله منجر به جواب‌های سالیتمونی (پایدار) می‌شود، یعنی پالس کوهان شکلی که با سرعت معین و بدون تغییر شکل در محیط پلاسما

انتشار امواج غیرخطی یکی از مهم‌ترین موضوعات در فیزیک پلاسما می‌باشد. محیط پلاسما به دلیل داشتن ویژگی‌های خاص خود قابلیت انتشار طیف وسیعی از امواج را دارد. امواج یون-صوتی به‌عنوان مهم‌ترین مد الکتروستاتیکی فرکانس پایین یکی از آنها می‌باشد. این امواج در اثر نوسان یون‌ها و در حضور الکترون‌های زمینه که نقش نیروی بازگرداننده را فراهم می‌کنند ایجاد می‌شوند [۱]. برای اولین بار ایکیز و همکاران [۲]

* نویسنده مسئول: mehdipoor.m59@gmail.com

¹ Korteweg-de-Vries



می‌توانند یافت شوند. محققین زیادی انتشار امواج غیرخطی را در الکترون-پوزیترون-یون پلاسماها مطالعه کرده‌اند [۲۱-۲۵]. تمرکز عمده مقالات ذکر شده بیشتر بر روی مطالعه ساختار امواج سالیتری از طریق تکنیک‌های اختلال کاهشی و یا شبه‌پتانسیل سقدیف می‌باشد. با این حال، به کمک تحلیل دینامیک غیرخطی به عنوان یک ابزار کلاسیک و اثرگذار در بررسی پایداری سیستم‌های پیچیده می‌توان اطلاعات جامع و متفاوتی را نسبت به روش‌های مرسوم به دست آورد. به عبارت دیگر، برخی از ویژگی‌های دینامیکی سیستم مانند تحلیل دوشاخگی، پایداری و گذار سیستم به حالت آشوب را می‌توان از طریق بررسی و تحلیل فضای فاز مطالعه کرد [۲۶-۳۰]. فضای فاز شامل مدارهای تناوبی و بسته‌ای است که هر کدام از این مسیرها نمایانگر انتشار مدهای نوسانی مختلفی می‌باشد. وجود امواج سالیتری، پریودیک، سوپرسالیتری و امواج پریودیک غیرخطی با دامنه خیلی بالا، ساختارهای متفاوتی از مدهای الکترواستاتیکی هستند که منطبق با مدارهای هموکلینیک و مسیرهای بسته تناوبی در نمودار فضای فاز، در محیط پلاسما قابل توصیف و بررسی هستند. محققین زیادی ویژگی‌های متفاوتی از امواج غیرخطی را با استفاده از تئوری دوشاخگی بررسی کرده‌اند. به عنوان نمونه، ساها و چاترجی ساختار امواج پایدار و رونده یون-صوتی [۳۱-۳۲] و صوتی غبار [۳۳-۳۴] را با استفاده از تحلیل فضای فاز بررسی کردند. علاوه بر این، دینامیک امواج الکترواستاتیکی یون-صوتی در غیاب و در حضور ذرات سنگین غبار در مراجع [۳۵-۳۸] نیز گزارش شده است. با این حال، مطالعه ساختار تناوبی، شبه‌تناوبی و رفتار آشوبناک در الکترون-پوزیترون-یون پلاسماها بسیار جذاب و حائز اهمیت می‌باشد. رفتار دینامیکی امواج یون-صوتی در یک الکترون-پوزیترون-یون پلاسما مغناطیده فوق

انتشار می‌یابد. چنین پالس‌هایی از توازن بین اثرات غیرخطی که سبب افتادگی موج می‌شوند با پاشندگی که منجر به پهن شدن موج می‌گردد، ایجاد می‌گردند. لازم به ذکر است که ساختار چنین امواجی به شدت به توزیع الکترون‌ها و یون‌ها در محیط پلاسما وابسته است. تابع توزیع‌های مختلفی برای ذرات موجود در پلاسما معرفی شده است. یکی از آنها توزیع فوق حرارتی کاپا (K) یا توزیع لورنتسی است. این توزیع در واقع تعمیمی از تابع توزیع ماکسول-بولتزمن به شکل دنباله‌هایی توانی از سرعت است که اولین بار توسط وسیلیونس [۵] معرفی شد. هدف آن در ابتدا توصیف مشاهدات تجربی و ماهواره‌ای پلاسماهای دور از تعادل گرمایی نظیر پلاسماهای موجود در مگنتوسفرهای مختلف (مانند زمین، مریخ، زحل و اورانوس) و بادهای خورشیدی بود [۶-۱۰]. تأثیر هم‌زمان برهم‌کنش موج-ذره و نیروهای خارجی، مهمترین عامل برای ایجاد چنین ذرات پرانرژی در محیط پلاسما می‌باشند. امروزه چنین ذرات پرانرژی یکی از مؤلفه‌های اصلی در مطالعه پلاسماهای فضایی و آزمایشگاهی هستند. محققین زیادی انتشار امواج یون-صوتی را در پلاسماهای فوق حرارتی دو مؤلفه‌ای متشکل از الکترون‌ها و یون‌ها بررسی کرده‌اند [۱۱-۱۵]. علاوه بر پلاسماهای متشکل از دو نوع ذره، در طبیعت و در شرایط آزمایشگاهی، پلاسماهای سه مؤلفه‌ای شامل الکترون-پوزیترون-یون نیز دیده شده است. در چنین پلاسماهایی، الکترون‌ها و پوزیترون‌ها با جرم‌های برابر و بارهای متضاد وجود دارند و زمان نابودی (نیم‌عمر) الکترون و پوزیترون از مقیاس زمانی مشخص برای رفتار جمعی ذرات طولانی‌تر است. بنابراین، انتشار امواج یون-صوتی غیرخطی در این محیط قابل بررسی خواهد بود. چنین پلاسماهایی در محیط‌های فضایی مانند درون ستاره‌های نوترونی چرخان [۱۶]، هسته فعال کهکشان‌ها [۱۷] و شرایط آزمایشگاهی [۱۸-۲۰]

الکترون-پوزیترون-یون پلاسمای تحت بررسی، جرم الکترون و پوزیترون یکسان است این موضوع تفاوت‌های قابل ملاحظه‌ای را در دینامیک امواج غیرخطی ایجاد خواهد کرد که جزئیات آن را در ادامه بحث خواهیم کرد.

با وجود مطالعات فراوانی که از طریق تحلیل فضای فاز، روی تحول دینامیکی و دوشاخگی امواج غیرخطی انجام شده است، تاکنون انواع دوشاخگی‌ها که به واسطه تغییر کوچکی در مقدار پارامترهای پلازما اتفاق می‌افتند و می‌توانند ساختار مدهای انتشار در پلازما را کنترل کنند، در یک پلاسمای سه مؤلفه‌ای شامل الکترون-پوزیترون-یون بررسی نشده است. بنابراین در این مقاله سعی شده است بعد از بیان معادلات اساسی و تعیین معادله دینامیکی سیستم، ابتدا نقاط تعادل سیستم تعیین و سپس با استفاده از تئوری دوشاخگی، معادله مشخصه‌ای را برای نقاط تعادل سیستم دینامیکی امواج یون-صوتی به دست آوریم. نشان خواهیم داد که چگالی پوزیترون‌های پرنرژی، دینامیک سیستم پلازما را به نحوی کنترل می‌کند که سبب ایجاد دوشاخگی ترابحرانی می‌شود.

اکنون جزئیات پژوهش حاضر را معرفی خواهیم کرد. ابتدا، معادلات اساسی سیال یونی در یک پلاسمای سه مؤلفه‌ای با در نظر گرفتن توزیع کاپا ارائه می‌شوند. سپس، دینامیک غیرخطی امواج رونده (تناوبی) بیان و معادله دینامیکی سیستم تعیین می‌گردد. دوشاخگی امواج بررسی و از طریق فضای فاز، ساختار امواج غیرخطی مطالعه می‌شوند. در نهایت، به اختصار نتایج حاصل از این کار ارائه خواهند شد.

معادلات اساسی مدل

در این پژوهش، به کمک معادلات هیدرودینامیکی، انتشار امواج الکتروستاتیکی (امواج یون-صوتی) در یک پلاسمای غیرمغناطیده شامل یون‌های سرد، الکترون‌ها

حرارتی در مرجع [۳۹] بررسی شده بود. آنها معادله غیرخطی KP را در یک پلاسمای سه مؤلفه‌ای با توزیع کاپا برای الکترون‌ها و پوزیترون‌ها به دست آوردند. جواب‌های دو و سه سالیتمونی با استفاده از روش مستقیم هیروتا بررسی و اثر پارامتر کاپا بر روی انتشار این جواب‌ها مطالعه شده بود. همچنین آنها با در نظر گرفتن یک اختلال نوسانی خارجی، رفتار شبه-نوسانی امواج یون-صوتی را نیز گزارش کرده بودند [۳۹]. قوش و همکاران [۴۰] چنین شرایطی را برای امواج غیرخطی یون-صوتی در یک الکترون-پوزیترون-یون پلازما با توزیع نافزونور برای ذرات پلازما بررسی کردند. آنها علاوه بر بیان خواص امواج نوسانی و شبه-نوسانی، حرکات آشوبناک امواج یون-صوتی را نیز مورد مطالعه قرار داده بودند [۴۰].

اخیراً، علی‌نژاد [۴۱]، تأثیر حضور الکترون‌های پرنرژی را روی دوشاخگی امواج غبار یون-صوتی بررسی کرده بود. علاوه بر این، اثر قطبیت ذرات غبار روی دوشاخگی امواج غبار یون-صوتی در مرجع [۴۲] نیز گزارش شده است. مشاهده شده که چگالی ذرات غبار با بارهای مثبت و منفی، ساختار امواج غبار یون-صوتی را به نحوی کنترل می‌کند که دو شاخگی ترابحرانی اتفاق می‌افتد. همچنین ساختار امواج نوسانی در این محیط، به شدت به جمعیت ذرات غبار در این نقاط بحرانی وابسته است [۴۲]. دوشاخگی امواج یون-صوتی در یک پلاسمای حاوی یون‌های منفی نیز اخیراً مورد بررسی قرار گرفته است [۴۳]. مشاهده شده که دما و چگالی یون‌های منفی تأثیر به‌سزایی بر روی دوشاخگی و پایداری با ناپایداری امواج دارند. باید دقت کنیم که شرایط موجود در مرجع [۴۳] کاملاً با پژوهش حاضر متفاوت می‌باشد. نتایج مذکور در مقاله [۴۳] نشان می‌دهند که وجود دوشاخگی و پایداری جواب‌ها به نسبت جرم یون منفی به مثبت و دمای یون‌های مثبت/منفی بستگی دارند. با این حال، چون در

مقادیر بزرگ ($\kappa_{e,p} \rightarrow \infty$) روابط ۴ و ۵ به توزیع ماکسولی منجر می‌شوند.

باید دقت کنیم که در مطالعه ساختار امواج الکتروستاتیکی از طریق روش اختلالی، در بسط روابط ۴ و ۵، برای حذف جملات کوچک باید شرط $\kappa_e (\kappa_p) \geq 3$ در نظر گرفته شود [۴۴].

رابطه پاشندگی

در این بخش قبل از پرداختن به جزئیات امواج غیرخطی یون-صوتی در یک الکترون-پوزیترون-یون پلاسمای غیرماکسولی، ابتدا رابطه پاشندگی امواج یون-صوتی را در محیط پلاسمای مدنظر بررسی خواهیم کرد. برای این منظور، کمیت‌های وابسته در معادلات ۳-۱ را به صورت ترکیبی از بخش تعادلی و مختل شده در نظر می‌گیریم یعنی: $n = 1 + \bar{n}$ ، $u = \bar{u}$ و $\phi = \bar{\phi}$. اکنون با فرض بخش اختلالی به صورت $e^{i(kx - \omega t)}$ که در آن k عدد موج و ω فرکانس موج می‌باشد و خطی‌سازی معادلات ۳-۱، رابطه پاشندگی به صورت $\omega = k/\sqrt{A + k^2}$ تعیین می‌شود. در اینجا پارامتر $A = (C_1 + p\delta D_1)/(1 - p)$ به شکل بیان می‌شود. ثابت‌های C_1 و D_1 به ترتیب به شاخص طیفی الکترون‌ها و پوزیترون‌ها وابسته هستند و به فرم زیر داده می‌شوند:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{\kappa_e - \frac{1}{2}}{\kappa_e - \frac{3}{2}} \\ D_1 = \frac{\kappa_p - \frac{1}{2}}{\kappa_p - \frac{3}{2}} \end{cases} \quad ۶$$

باید دقت کنیم که در غیاب پوزیترون‌ها ($p = 0$) و در حالت حدی $\kappa_{e,p} \rightarrow \infty$ ، رابطه پاشندگی داده شده به صورت $\omega = k/\sqrt{1 + k^2}$ بیان می‌شود که با رابطه پاشندگی امواج یون-صوتی در یک پلاسمای دو مؤلفه‌ای با یون‌های سرد و الکترون‌های ماکسولی مطابقت می‌کند [۴]. محاسبات عددی نشان می‌دهند که

و پوزیترون‌های فوق حرارتی بررسی شده است. فرض می‌کنیم که سرعت فاز امواج یون-صوتی از سرعت گرمایی یون‌ها خیلی بیشتر و از سرعت گرمایی الکترون‌ها (پوزیترون‌ها) خیلی کمتر باشد بنابراین، از اینرسی الکترون‌ها (پوزیترون‌ها) صرف‌نظر شده و توزیع کاپا برای آنها فرض شده است. در چنین شرایطی، دینامیک غیرخطی امواج یون-صوتی در حالت یک بعدی، بر طبق معادلات بهنجار شده زیر بیان می‌شوند:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nu) = 0, \quad ۱$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad ۲$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{1-p} n_e - \frac{p}{1-p} n_p - n. \quad ۳$$

طوری‌که چگالی بهنجار شده الکترون‌ها و پوزیترون‌ها، به صورت زیر داده می‌شود:

$$n_e = \left(1 - \frac{\phi}{\kappa_e - \frac{3}{2}}\right)^{-\kappa_e + \frac{1}{2}}, \quad ۴$$

$$n_p = \left(1 + \frac{\delta \phi}{\kappa_p - \frac{3}{2}}\right)^{-\kappa_p + \frac{1}{2}}. \quad ۵$$

در معادلات فوق، چگالی یون‌ها n ، الکترون‌ها n_e و پوزیترون‌ها n_p به ترتیب به چگالی مختل نشده ذرات n_{j0} ($j=i, e, p$) بهنجار شده است. سرعت u به سرعت یون-صوتی $C_0 = (T_e/m_i)^{1/2}$ ، پتانسیل الکتریکی ϕ به T_e/e ، زمان t و مکان x به ترتیب به فرکانس یونی پلاسمای $\omega_{pi} = (4\pi e^2 n_{i0}/m_i)^{1/2}$ و طول دمای یون $\lambda_D = (T_e/4\pi e^2 n_{i0})^{1/2}$ بهنجار شده‌اند. در اینجا، پارامترهای $\delta = T_e/T_p$ و $p = n_{p0}/n_{e0}$ به ترتیب نسبت چگالی مختل نشده پوزیترون‌ها به الکترون‌ها و نسبت دمای الکترون به پوزیترون می‌باشند. شاخص κ_e و κ_p نیز میزان انحراف الکترون‌ها و پوزیترون‌ها را از حالت تعادلی نشان می‌دهند. مقادیر کوچک این شاخص‌ها، بیانگر حضور بیشتر الکترون‌ها و پوزیترون‌های پراثرژی در سیستم خواهند بود. در ازای

ساده‌ترین راه توصیف تحول یک سیستم استفاده از روش کاهش ابعاد سیستم‌های دینامیکی می‌باشد که در آن معادله غیرخطی مرتبه دوم، به دو معادله مرتبه اول مستقل از زمان تبدیل می‌شود. تحت چنین شرایطی معادله ۷ با دستگاه معادلات جفت‌شده غیرخطی زیر هم‌ارز است:

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{d\xi} = Z \\ \frac{dZ}{d\xi} = M\phi + N\phi^2 + L\phi^3 \end{cases} \quad ۱۴$$

سیستم ۱۴ یک سیستم دینامیکی تخت است که توسط تابع هامیلتونی زیر توصیف می‌شود:

$$H(\phi, Z) = \frac{1}{2}Z^2 + \Gamma(\phi) \quad ۱۵$$

در اینجا وضعیت سیستم توسط مختصات عمومی (ϕ, Z) توصیف می‌شود. مزیت این توصیف آن است که دید مهمی در مورد دینامیک پلاسما ارائه می‌دهد و ماهیت کیفی جواب‌های موج رونده را در برمی‌گیرد. مسیرهای فاز در فضای فاز با انرژی کل سیستم مطابقت دارد و نشان‌دهنده جواب‌های موج رونده غیرخطی هستند که وابسته به محدوده وسیعی از تغییر پارامترهای پلاسما می‌باشند. علاوه بر این، معادله دینامیکی ۱۴، نقاط دوشاخگی یعنی جایی که با تغییر کوچک پارامترهای پلاسما شکل موج عوض می‌شود و گذاری بین امواج رونده اتفاق می‌افتد را مشخص می‌کند. در ادامه، فضای فاز و دوشاخگی امواج الکتروستاتیکی یون-صوتی را بررسی خواهیم کرد.

لازم به ذکر است که نتایج موجود در این پژوهش قابل کاربرد در پلاسماهای فضایی و آزمایشگاهی در حضور الکترون‌ها و پوزیترون‌های پرنانرژی با توزیع کاپا می‌باشند. به عبارت دیگر، در تجزیه و تحلیل عددی ما بازه پارامترهای موجود در این پژوهش را از مقادیر عددی گزارش شده در مگنتوسفر ستاره‌های نوترونی چرخان انتخاب کرده‌ایم. در مگنتوسفر ستاره‌های

افزایش چگالی پوزیترون‌ها سبب کاهش فرکانس (سرعت فاز) موج منتشر شده می‌شود.

دینامیک امواج رونده

برای مطالعه دینامیک کلیه امواج غیرخطی قابل انتشار در مدل پلاسما حاضر و بررسی پایداری آنها، بهتر است چارچوب مرجعی را معرفی کنیم که ذرات پلاسما همراه آن با سرعت V حرکت می‌کنند. لذا با تغییر متغیر $\xi = x - Vt$ و شرایط مرزی $n \rightarrow 1, u \rightarrow 0$ ، $\phi \rightarrow 0$ و $d\phi/d\xi \rightarrow 0$ در صورتی که $\xi \rightarrow \pm\infty$ می‌توانیم با استفاده از معادلات ۵-۱، رابطه زیر را برای دینامیک یون‌ها به دست آوریم:

$$\frac{d^2\phi}{d\xi^2} = -\frac{d\Gamma(\phi)}{d\phi} = M\phi + N\phi^2 + L\phi^3 \quad ۷$$

طوری که

$$M = \frac{C_1}{1-p} + \frac{D_1\delta p}{1-p} - \frac{1}{V^2}, \quad ۸$$

$$N = \frac{C_2}{1-p} - \frac{D_2\delta^2 p}{1-p} - \frac{3}{2V^4}, \quad ۹$$

$$L = \frac{C_3}{1-p} + \frac{D_3\delta^3 p}{1-p} - \frac{5}{2V^6}. \quad ۱۰$$

با ثابت‌های

$$\begin{cases} C_2 = \frac{C_1(\kappa_e + \frac{1}{2})}{2(\kappa_e - \frac{3}{2})} \\ C_3 = \frac{C_2(\kappa_e + \frac{3}{2})}{3(\kappa_e - \frac{3}{2})} \end{cases} \quad ۱۱$$

$$\begin{cases} D_2 = \frac{D_1(\kappa_p + \frac{1}{2})}{2(\kappa_p - \frac{3}{2})} \\ D_3 = \frac{D_2(\kappa_p + \frac{3}{2})}{3(\kappa_p - \frac{3}{2})} \end{cases} \quad ۱۲$$

لازم به ذکر است که معادله ۷ بیانگر معادله انرژی یک ذره در حال نوسان به جرم واحد با سرعت $d\phi/d\xi$ در پتانسیل Γ می‌باشد. انرژی پتانسیل الکتریکی $\Gamma(\phi)$ طبق رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\Gamma(\phi) = -\frac{M\phi^2}{2} - \frac{N\phi^3}{3} - \frac{L\phi^4}{4} \quad ۱۳$$

نوترونی چرخان، مقادیر چگالی و دمای الکترون‌ها و پوزیترون‌ها به صورت زیر گزارش شده‌اند [۴۵]:
 چگالی الکترون‌ها و پوزیترون‌ها از مرتبه 10^{20} و دمای الکترون‌ها و پوزیترون‌ها از مرتبه 10^{21} m^{-3} و $10 - 100 \text{ eV}$. بر این اساس، در ادامه کار پارامترهای مورد استفاده در رسم نمودارها در بازه $0 \leq p < 1$ و $0 \leq \delta \leq 2$ انتخاب شده‌اند.

تحلیل دوشاخگی

همان‌طور که اشاره شد تغییر پارامترهای پلاسما منجر به شکل‌گیری ساختارهای مختلفی از امواج غیرخطی می‌شود. به عبارت دیگر، سیستم دینامیکی ۱۴ نقاط دوشاخگی و انتقال بین مدهای مختلفی که قابلیت انتشار در محیط پلاسما را دارند نشان می‌دهد. این بدان معنی است که نقاط ثابت (نقاط تعادل) سیستم، شکل فضای فاز را کنترل می‌کنند. این نقاط، نقاطی هستند که معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم یک جواب ثابت بدون وابستگی به زمان دارند. با به کار بردن تئوری دوشاخگی [۳۰]، نقاط تعادل سیستم دینامیکی ۱۴ از طریق حل همزمان $\frac{dZ}{d\xi} = 0$ و $\frac{d\phi}{d\xi} = 0$ به دست می‌آیند که با حل آنها این نقاط به صورت $E_0(\Phi_0, 0)$ ، $E_1(\Phi_1, 0)$ و $E_2(\Phi_2, 0)$ داده می‌شوند. در اینجا $\Phi_0 = 0$ نقطه تعادل بدیهی و $\Phi_{1,2}$ نقاط تعادل غیربدیهی هستند که از حل معادله درجه دو $L\phi^2 + N\phi + M = 0$ به فرم زیر به دست می‌آیند:

$$\Phi_{1,2} = \frac{1}{2L}(-N \pm \sqrt{N^2 - 4LM}) \quad 16$$

طوری که شاخص ۱ و ۲ به ترتیب با علامت‌های + و - مطابقت دارد.

بسته به مقادیر مختلف کمیت‌های موجود در سیستم پلاسما حاضر، نقاط تعادلی ۱۶ رفتارهای مختلفی می‌توانند داشته باشند. در شکل‌های ۱ تا ۴ نقاط تعادلی و وابستگی آنها به تغییر پارامترهای پلاسما مانند نسبت چگالی مختل نشده پوزیترون‌ها به الکترون‌ها (p) و

نسبت دمای الکترون به پوزیترون (δ) بررسی شده است.

شکل ۱ موقعیت نقاط ثابت (تعادل) را وقتی که کمیت p تغییر می‌کند نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که نقطه تعادل بدیهی ($\Phi_0 = 0, 0$) برای تمام مقادیر p وجود دارد در حالی که نقطه ثابت $(\Phi_{1,2}, 0)$ فقط به ازای مقادیر $p_i > p$ ظاهر می‌شوند. کمیت p_i مقدار آستانه چگالی پوزیترون‌ها برای وجود نقاط ثابت غیربدیهی را بیان می‌کند و از شرط $\Delta = N^2 - 4LM = 0$ به دست می‌آید. به عبارت دیگر، برای چگالی‌هایی در محدوده $0 < p < p_i$ (ناحیه I)، مقدار دلتای معادله درجه دو معرفی شده در بالا منفی بوده و نقاط تعادل غیر بدیهی موهومی می‌شوند. در این حالت، از نظر فیزیکی هیچ موجی قابلیت انتشار در محیط را ندارد. شرط لازم و کافی برای انتشار امواج غیرخطی در یک محیط پلاسما، وجود حداقل یک مقدار کمینه (مینیمم) برای تابع انرژی پتانسیل می‌باشد. چنین شرطی در ازاء وجود نقاط تعادل حقیقی در محیط پلاسما ایجاد می‌گردند که بتواند نوسانات ذره را بین این دو نقطه توصیف کند. لذا نقاط تعادل غیربدیهی موهومی، چنین ساختاری را برای تابع انرژی پتانسیل و به تبع انتشار موج غیرخطی فراهم نمی‌کنند.

از طرفی برای ناحیه II، یعنی برای $p_c < p < p_i$ ، هر سه نقطه تعادل بدیهی و غیربدیهی وجود دارند با این تفاسیر که نقاط تعادل غیربدیهی منفی هستند. جزئیات بیشتر این ناحیه در شکل ۴ بررسی شده است.

نهایتاً به ازای مقادیر $p > p_c$ (ناحیه III)، نقاط تعادل غیربدیهی دارای مقادیر مثبت و منفی هستند. p_c پارامتر دوشاخگی ترابحرانی می‌باشد که اطلاعات بیشتر در ادامه داده خواهند شد. در حقیقت شکل ۱ نشان می‌دهد که پارامتر چگالی پوزیترون‌ها وجود نقاط تعادل و انتشار امواج رونده مطابق با آنها را کنترل می‌کند. در این شکل، سایر پارامترهای پلاسما به صورت $M =$

با استفاده از تحلیل دوشاخگی سیستم‌های دینامیکی، مقدار پارامتر دوشاخگی ترابحرانی p_c از رابطه زیر به دست می‌آید:

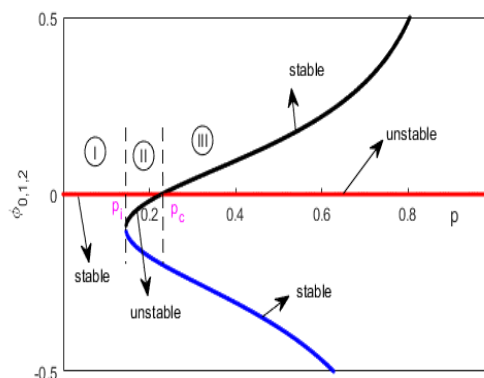
$$p_c = -\frac{(2M^2\kappa_e - M^2 - 2\kappa_e + 3)(2\kappa_p - 3)}{(2\kappa_e - 3)(2M^2\delta\kappa_p - M^2\delta + 2\kappa_p - 3)} \quad 18$$

که به ازای مقادیر عددی $\delta = 1.5$ ، $M = 0.6$ ، $\kappa_p = 4$ و $\kappa_e = 3$ برطبق رابطه فوق، مقدار پارامتر دوشاخگی ترابحرانی به صورت $p_c = 0.227$ به دست می‌آید.

علاوه بر این، نتایج داده شده در شکل ۱ نشان می‌دهند که برای $p = p_i$ دو نقطه ثابت Φ_1 و Φ_2 به هم برخورد می‌کنند و از بین می‌روند. این احتمال دوشاخگی زین-گره را نشان می‌دهد که نقاط ثابت به سمت یکدیگر حرکت می‌کنند، برخورد می‌کنند و متقابلاً نابود می‌شوند. این شرایط باعث عدم انتشار امواج سالیتمونی و امواج تناوبی در محیط پلاسما می‌گردند و با مطالب ارائه شده در بخش نقاط تعادل غیربدیهی موهومی که برای ناحیه $0 < p < p_i$ مطرح شده بود سازگاری کامل دارند.

تغییرات این دو کمیت یعنی چگالی آستانه و پارامتر دوشاخگی ترابحرانی با شاخص طیفی پوزیترون‌ها κ_p و نسبت دمای الکترون‌ها به پوزیترون‌ها δ در شکل ۲ نشان داده شده است. از شکل ۲ الف مشاهده می‌شود که با افزایش κ_p ، مقادیر چگالی آستانه پوزیترون‌ها و دوشاخگی ترابحرانی افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر، در حضور جمعیت بالای پوزیترون‌های پرانرژی (مقادیر کوچک κ_p)، مقادیر p_i و p_c کاهش می‌یابند. این بیان می‌کند که با تغییر شاخص طیفی پوزیترون‌ها چگالی‌های p_i و p_c به مقادیر بالاتری تغییر پیدا می‌کنند و این موضوع شرایط جدیدی را از دوشاخگی ترابحرانی به وجود می‌آورد که به واسطه آن دینامیک متفاوتی از امواج یون-صوتی پدیدار خواهد شد.

0.6، $\delta = 1.5$ ، $\kappa_e = 3$ و $\kappa_p = 4$ در نظر گرفته شده‌اند.



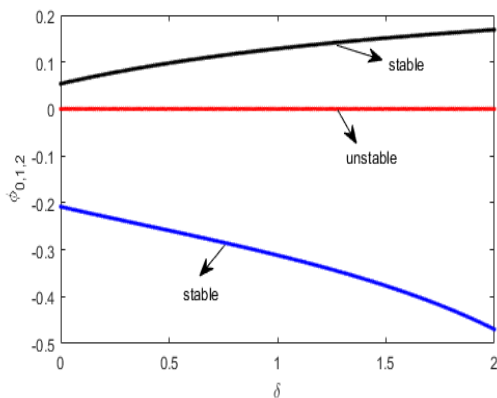
شکل ۱. تغییرات نقاط تعادلی و پایداری سیستم دینامیکی با پارامتر p . نمودار قرمز رنگ Φ_0 ، نمودار آبی Φ_1 و نمودار سیاه رنگ Φ_2 .

محدوده‌های پایداری و ناپایداری نقاط تعادل که در شکل ۱ نشان داده شده است نیز با استفاده از تحلیل پایداری خطی سیستم‌های دینامیکی بر طبق معادله زیر مشخص شده است:

$$\lambda^2 - 3L\Phi_{0,1,2}^2 - 2N\Phi_{0,1,2} - M = 0 \quad 19$$

در عبارت فوق λ آهنگ رشد یا واپاشی جواب‌های نقاط تعادلی می‌باشد. مشاهده می‌شود که پایداری نقاط تعادل در $p = p_c$ ممکن است تغییر کند. در این حالت، دینامیک غیرخطی امواج یون-صوتی با یک دوشاخگی ترابحرانی مواجه می‌شوند. منظور از دوشاخگی ترابحرانی یعنی یک نقطه ثابتی که برای همه مقادیر مختلف از پارامترهای سیستم وجود دارد و از بین نمی‌رود. به عبارت دیگر، قبل و بعد از دوشاخگی، یک نقطه ثابت ناپایدار و یک نقطه ثابت پایدار وجود دارد. وقتی که آنها به هم برخورد می‌کنند پایداری‌شان تغییر می‌کند طوری که، نقطه ثابت ناپایدار، پایدار می‌شود و برعکس. در مدل حاضر، در چگالی $p = p_c$ دوشاخگی ایجاد می‌شود. بعد از دوشاخگی، دو نقطه ثابت Φ_0 و Φ_2 ناپدید نمی‌شوند بلکه فقط ثابت آنها تغییر خواهد کرد.

شکل ۳ موقعیت نقاط ثابت و پایداری آنها را با تغییرات نسبت دمای الکترون‌ها به پوزیترون‌ها نشان می‌دهد. در اینجا $M = 0.6$, $p = 0.5 > p_c$, $\kappa_e = 3$ و $\kappa_p = 4$ در نظر گرفته شده‌اند. مشاهده می‌شود که برای مقادیر داده شده نسبت دمای الکترون‌ها به پوزیترون‌ها، تمام نقاط ثابت‌ها وجود دارند و پایداری و ناپایداری آنها تغییر نمی‌کند. این بدان معنی است که در الکترون-پوزیترون-یون پلاسمای حاضر، پارامتر δ هیچ امکانی را برای ایجاد دوشاخگی ترابحرانی فراهم نمی‌کند که با نتیجه داده شده در پلاسماهای یون منفی [۴۳] متفاوت می‌باشد.



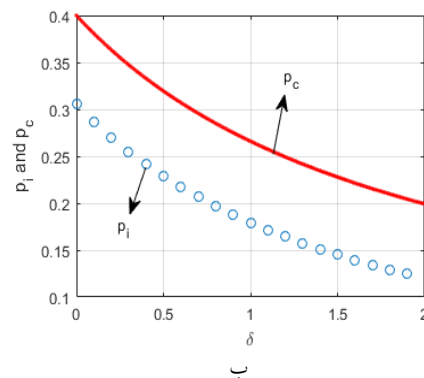
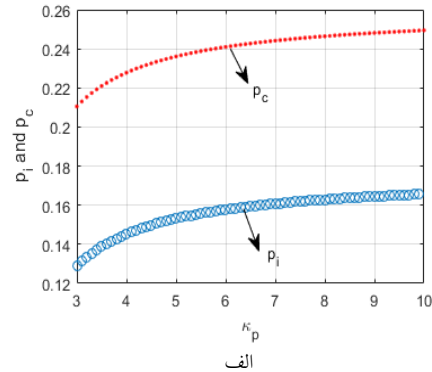
شکل ۳. تغییرات نقاط تعادلی و پایداری سیستم دینامیکی با پارامتر δ . نمودار قرمز رنگ Φ_0 ، نمودار آبی Φ_1 و نمودار سیاه رنگ Φ_2 .

توصیف فضای فاز امواج غیرخطی

قبلاً اشاره شد که نقاط تعادل سیستم دینامیکی ۱۴، $(\Phi_{0,1,2}, 0)$ را می‌توان از طریق حل همزمان $\frac{dz}{d\xi} = 0$ و $\frac{d\phi}{d\xi} = 0$ به دست آورد. علاوه بر معادله مشخصه ۱۷، پایداری هر نقطه ثابت را به کمک ماتریس ژاکوبین نیز می‌توان تعیین کرد. لذا در ادامه، ابتدا شرایط پایداری از طریق ماتریس ژاکوبین را بررسی کرده و سپس به توصیف کیفی فضای فاز خواهیم پرداخت. درمیان ماتریس ژاکوبی سیستم خطی شده دستگاه معادلات ۱۴ به فرم زیر تعیین می‌شود:

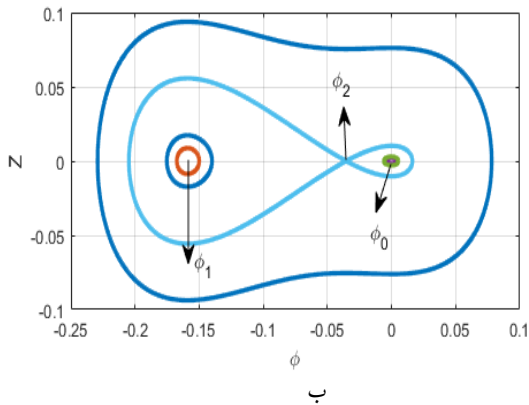
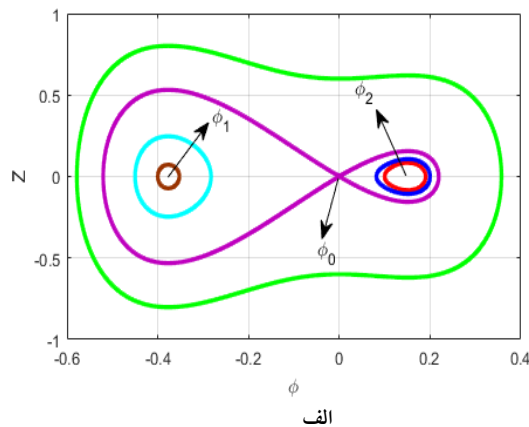
$$J = -(M + 2N\phi + 3L\phi^2) \quad 19$$

اثر متفاوتی از نقش نسبت دمای الکترون‌ها به پوزیترون‌ها، روی مقادیر چگالی آستانه و نقاط دوشاخگی ترابحرانی در شکل ۲ نمایش داده شده است. همان‌طور که دیده می‌شود، با افزایش دمای الکترون‌ها، مقادیر مورد نیاز از جمعیت پوزیترون‌های پرانرژی برای شروع انتشار امواج p_i و همچنین برای وجود دوشاخگی ترابحرانی p_c کاهش می‌یابند. در حقیقت با تغییر دمای الکترون‌ها اندازه ضریب پاشندگی و غیرخطیت محیط تغییر می‌کند و از آنجایی که شکل و نوع انتشار امواج به این دو فاکتور وابسته هستند لذا افزایش دمای الکترون‌ها، شرایط جدیدی برای شروع انتشار امواج و همچنین دوشاخگی ترابحرانی ایجاد می‌کند و به واسطه آن تحول امواج یون-صوتی کنترل خواهد شد. در این شکل‌ها، مقادیر ثابت پارامترهای پلازما مانند شکل ۱ انتخاب شده‌اند.



شکل ۲. تغییرات چگالی آستانه p_i و پارامتر دوشاخگی ترابحرانی p_c برحسب الف: شاخص طیفی پوزیترون‌ها و ب: نسبت دمای الکترون‌ها به پوزیترون‌ها.

Φ_0 و Φ_2 ایجاد می‌شوند. نقطه $\Phi_0 = 0$ و $\Phi_1 = -0.159$ نقاط پایدار مرکزی هستند و $\Phi_2 = -0.035$ زینی ناپایدار است. این نتایج تأکید می‌کنند که با تغییر پارامتر چگالی پوزیترون‌ها، گذاری از انتشار امواج سالیتمونی به نوسانی را مشاهده خواهیم کرد.

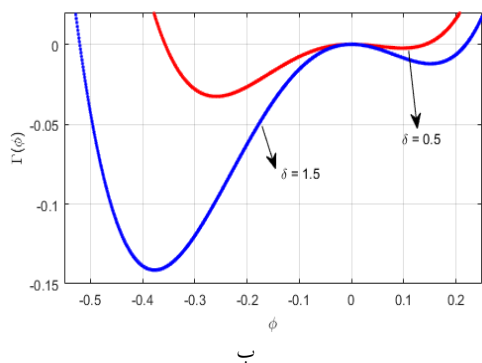
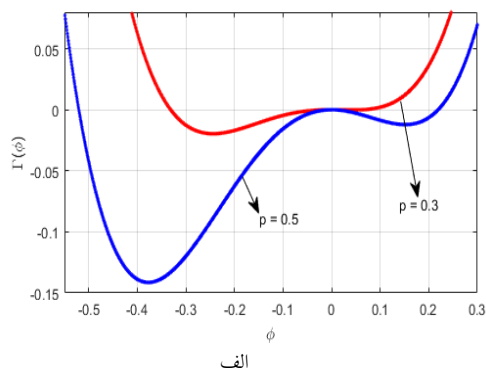


شکل ۴. نمایش نمودار فضای فاز سیستم دینامیکی ۱۴ به ازای الف: $p = 0.5 > p_c$ و ب: $p = 0.18 < p_c$. سایر پارامترها به صورت $M = 0.6$ ، $\kappa_e = 3$ ، $\kappa_p = 4$ و $\delta = 1.5$ فرض شده‌اند.

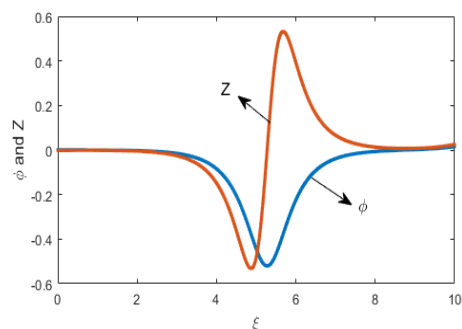
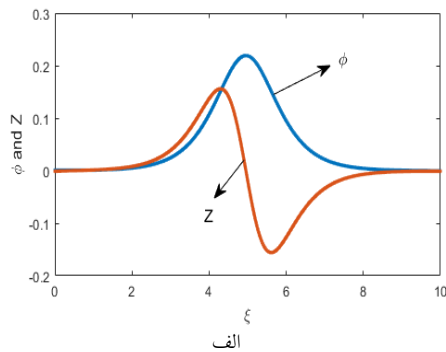
اکنون با توجه به نقاط پایدار مرکزی Φ_1 و Φ_2 در شکل ۴الف، پروفایل امواج تناوبی مربوطه را در شکل ۵ بررسی خواهیم کرد. شکل ۵الف و ب به ترتیب به ازای شرایط اولیه $(\Phi = -0.4, Z = 0.0001)$ و $(\Phi = 0.1, Z = 0.0001)$ وجود امواج تناوبی با دامنه منفی و مثبت در این شکل تأیید می‌گردد. مشاهده می‌شود که پتانسیل (ϕ) مربوط به امواج تناوبی یون-صوتی غیرخطی با دامنه مثبت (شکل ۵ب) با

بر طبق تئوری سیستم‌های دینامیکی، شکل موضعی مسیرهای نزدیک نقاط تعادل به وسیله علامت ژاکوبی مشخص می‌شود [۴۶]. برای حالتی که $J < 0$ باشد نقاط تعادل سیستم زینی است و برای حالتی که $J > 0$ ، تعادل به صورت یک مسیر دایره‌ای بسته پایدار (مرکزی) می‌باشد. جزئیات بیشتر در مورد نقطه تعادل زینی و مرکزی را در ادامه مورد بحث قرار می‌دهیم. باید دقت کنیم که توصیف کیفی انواع مختلفی از امواج غیرخطی که قابلیت انتشار در محیط پلاسما را دارند از تحلیل فضای فاز انجام می‌شود. به عبارت دیگر، مسیرهای بسته مختلف در فضای فاز منطبق با ساختار متفاوت امواج غیرخطی هستند. مدار هموکلینیک (پیرامون نقاط زینی) نشان‌دهنده انتشار امواج سالیتمونی و مدارهای بسته (پیرامون نقاط ثابت مرکزی) انتشار امواج تناوبی غیرخطی را توصیف می‌کنند [۴۵]. در سیستم پلاسما حاضر، تحلیل دوشاخگی بیان می‌کند که وجود و پایداری نقاط ثابت به شدت به پارامترهای محیط پلاسما نظیر نسبت چگالی پوزیترون‌ها به الکترون‌ها و نسبت دمای الکترون به پوزیترون وابسته است. شکل ۴الف، تحلیل عددی سیستم معادلات دینامیکی ۱۴ را در فضای فاز نشان می‌دهد. در اینجا مقدار نسبت چگالی پوزیترون‌ها به الکترون‌ها 0.5 انتخاب شده که بیشتر از پارامتر دوشاخگی تریجرانی است. مشاهده می‌شود که نقطه بدیهی $\Phi_0 = 0$ نقطه زینی ناپایدار است و نقاط $\Phi_1 = -0.37$ و $\Phi_2 = 0.15$ پایدار و مرکزی هستند. بنابراین شکل ۴الف یک مدار هموکلینیک در نقطه زینی همراه با دو مدار تناوبی غیرخطی حول مراکز دایره‌ها را نشان می‌دهد. مدارهای بسته با شعاع‌های مختلف نمایانگر مقادیر متفاوت هامیلتونی سیستم هستند. از طرف دیگر، رفتار دینامیکی سیستم حاضر به ازای مقادیر کمتر از پارامتر دوشاخگی بحرانی یعنی $p = 0.18 < p_c$ در شکل ۴ب بررسی شده است. در اینجا شرایط متفاوتی برای نقاط تعادلی

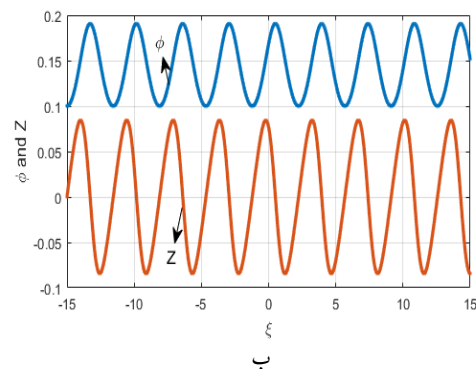
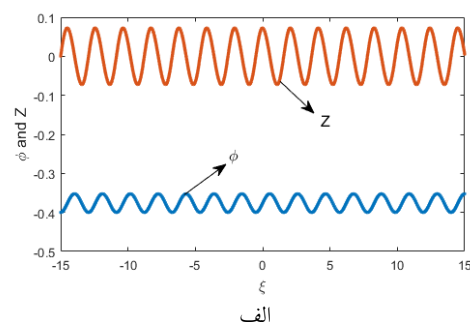
پارامترهای پلاسما به صورت $\delta = 1.5$ ، $M = 0.6$ ، $p = 0.5$ ، $\kappa_e = 3$ و $\kappa_p = 4$ در نظر گرفته شده‌اند.



شکل ۶. تغییرات انرژی پتانسیل برحسب ϕ برای مقادیر مختلف الف: چگالی پوزیترون‌ها و ب: دمای الکترون‌ها. سایر پارامترها مانند شکل ۱ هستند.



تحریکات بلندتری نسبت به امواج تناوبی غیرخطی با دامنه منفی (شکل ۵الف) می‌توانند ظاهر شوند. علاوه بر این، ساختار میدان الکتریکی (Z) این امواج تناوبی نیز در شکل ۵ نشان داده شده است.



شکل ۵. نمایی از پتانسیل امواج یون-صوتی تناوبی غیرخطی ϕ و میدان الکتریکی Z آنها به‌ازاء شرایط اولیه الف: ($\Phi = -0.4, Z = 0.0001$) و ب: ($\Phi = 0.1, Z = 0.0001$).

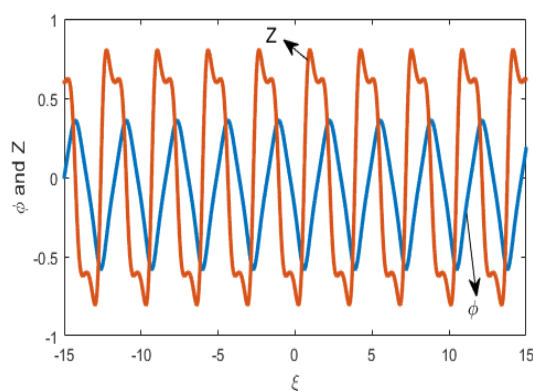
اکنون برای بررسی سایر ساختار غیرخطی (امواج سالیوتونی) ممکن در این محیط و تأیید نتایج به‌دست آمده از فضای فاز ترسیم شده در شکل ۴الف، انرژی سیستم $\Gamma(\phi)$ را به‌عنوان یک تابعی از ϕ بررسی می‌کنیم. حضور دو چاه پتانسیل در شکل ۶، بیانگر وجود امواج پایدار یون-صوتی با دامنه مثبت و منفی می‌باشد. در چنین شرایطی دامنه امواج سالیوتونی منفی بزرگتر از امواج سالیوتونی مثبت است. همچنین مشاهده می‌شود که دامنه امواج سالیوتونی با افزایش چگالی پوزیترون‌ها دمای الکترون‌ها افزایش می‌یابد. شکل ۷ ساختار چنین امواج جایگزیده‌ای را به‌همراه میدان الکتریکی مرتبط با آنها را نشان می‌دهد. در اینجا

بررسی شده است. رفتار دینامیکی امواج یون-صوتی در یک الکترون-پوزیترون-یون پلاسما با توزیع کاپا [۳۹] و نافزونور [۴۰] برای الکترون‌ها و پوزیترون‌ها بررسی شده است. محققین در این مطالعات، ویژگی‌های امواج سالیوتونی، نوسانی و شبه‌نوسانی را با در نظر گرفتن یک اختلال تناوبی خارجی گزارش کرده بودند. باید دقت کنیم که در مرجع [۳۹] فقط اثر شاخص طیفی کاپا (κ) و در مرجع [۴۰] تأثیر پارامتر غیرگرمایی (q) بر روی ساختار امواج یون-صوتی غیرخطی بررسی شده بود. به عبارت دیگر، در این مقالات، دوشاخگی امواج غیرخطی در یک الکترون-پوزیترون-یون پلاسما که به طور واضح بتواند گذار بین امواج مختلف غیرخطی را نشان دهد و رفتار سیستم در ازای تغییرات کوچک در مقادیر پارامترهای پلاسما را پیش‌بینی کند، مورد ارزیابی قرار نگرفته است. لذا، در پژوهش حاضر، با تعیین نقاط تعادلی سیستم، تأثیر پارامترهای پلاسما بر روی پایداری آنها بررسی و شرایطی که سبب تغییر دینامیک پلاسما می‌شوند مطالعه شده است.

از طرف دیگر، اخیراً دوشاخگی امواج یون-صوتی در یک پلاسمای حاوی یون‌های منفی در مرجع [۴۳] مورد بررسی قرار گرفته بود. لازم به ذکر است که مطالعه حاضر تفاوت ویژه‌ای با پژوهش مذکور دارد که برخی از آنها به شرح زیر بیان می‌شوند. اولاً به دلیل داشتن اختلاف جرمی بین یون‌های منفی و مثبت، نتایج گزارش شده در مرجع [۴۳] نشان می‌دهند که برای مقادیر بیشتر از مقدار بحرانی نسبت جرم یون منفی به مثبت (نشان داده شده با پارامتر μ در مرجع [۴۳])، نقاط ثابت غیربدهی ظاهر نمی‌شوند و در این شرایط، امکان انتشار امواج غیرخطی وجود ندارد. به عبارت دیگر، انتشار امواج غیرخطی در یک پلاسمای یون منفی، به نسبت جرمی یون‌ها وابسته است. برای جزئیات بیشتر، شکل ۱ در مرجع [۴۳] را ملاحظه کنید. با این

شکل ۷. پروفایل تحول زمانی پتانسیل ϕ و میدان الکتریکی Z سالیوتون‌های یون-صوتی غیرخطی الف: دامنه مثبت ب: دامنه منفی.

با دنبال کردن نتایج به دست آمده از تحلیل فضای فاز منطبق با شکل ۴ الف، مسیر بسته‌ای بالای نقطه زینی مشاهده می‌شود که نشان‌دهنده انتشار امواج تناوبی غیرخطی با دامنه خیلی زیاد نسبت به امواج تناوبی قبلی می‌باشند. نمودار پتانسیل و میدان الکتریکی مرتبط با چنین امواجی در شکل ۸ نشان داده شده است. شرایط اولیه در این شکل به صورت $(\Phi = 0.001, Z = 0.6)$ انتخاب شده است. سایر پارامترهای پلاسما مانند شکل ۴ الف می‌باشند. ساختار این امواج از امواج تناوبی و سالیوتونی که قبلاً بررسی شده بود متفاوت است. طوری که این امواج با یک شکل مثلث‌گونه متفاوتی در هر چرخه نوسان منتشر می‌شوند و دامنه آنها به مراتب از امواج مورد بحث قبلی (تناوبی/سالیوتونی) بیشتر می‌باشد. لازم به ذکر است که حضور امواج تناوبی، سالیوتونی و نوسانی با دامنه خیلی زیاد، از فضای فاز ترسیم شده در شکل ۴ ب نیز قابل استنتاج هستند که از بیان جزئیات مربوط به آنها صرف نظر شده است.



شکل ۸ تحول زمانی ϕ و میدان الکتریکی Z امواج تناوبی غیرخطی با دامنه خیلی بالا به ازای شرایط اولیه $(\Phi = 0.001, Z = 0.6)$.

در ادامه برای کامل شدن بحث، تفاوت پژوهش حاضر با سایر مطالعات قبلی یعنی مراجع [۳۹-۴۰] و [۴۳]

فضای فاز و تئوری دوشاخگی‌ها آشکار می‌شوند که می‌توانند در درک بهتر تحول دینامیکی سیستم‌های پیچیده نظیر پلاسماهای آزمایشگاهی و فضایی نقش به‌سزایی داشته باشند.

مرجع‌ها

- [1] L. Stenflo, Generalized Lorenz equations for acoustic-gravity waves in the atmosphere, *Physics Scripta* 53 (1996) 83-84. <https://doi.org/10.1088/0031-8949/53/1/015>
- [2] H. Ikezi, R. Taylor, D. Baker, Formation and interaction of ion-Acoustic solitons, *Physical Review Letters* 25 (1970) 11-14. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.25.11>
- [3] H. Washimi, T. Taniuti, Propagation of ion-acoustic solitary waves of small amplitude, *Physical Review Letters* 17 (1966) 966. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.17.996>
- [4] R.C. Davidson, *Methods in nonlinear plasma theory*, Academic Press (1972).
- [5] V.M. Vasyliunas, A survey of low-energy electrons in the evening sector of the magnetosphere with OGO 1 and OGO 3, *Journal of Geophysical Research* 73 (1968) 2839. <https://doi.org/10.1029/JA073i009p02839>
- [6] V. Pierrard, J. Lemaire, Lorentzian ion exosphere model, *Journal of Geophysical Research* 101 (1966) 7923. <https://doi.org/10.1029/95JA03802>
- [7] S.P. Christon, D.G. Mitchel, D.J. Williams, L.A. Frank, C.Y. Huang, T.E. Eastman, Energy spectra of plasma sheet ions and electrons from ~ 50 eV/e to ~ 1 MeV during plasma temperature transitions, *Journal of Geophysical Research* 93 (1988) 2562. <https://doi.org/10.1029/JA093iA04p02562>

حال، نتایج پژوهش حاضر نشان دادند که دوشاخگی، وجود و عدم انتشار امواج یون-صوتی غیرخطی به جرم ذرات وابسته نیست و نسبت چگالی پوزیترون‌ها به الکترون‌ها (p) به‌عنوان یک عامل کلیدی جهت کنترل دوشاخگی می‌تواند ظاهر شود. ثانیاً نتایج موجود در مرجع [۴۳] نشان دادند که دوشاخگی ترابحرانی فقط در پلاسماهای یون منفی سرد ظاهر می‌شود. شکل ۲ب در مقاله [۴۳] را مشاهده کنید. این در حالی است که در یک الکترون-پوزیترون-یون پلاسما، گونه‌های الکترون و پوزیترون در هر دمایی باشند به‌ازاء تمام مقادیر نسبت دمای الکترون به پوزیترون (δ)، شاهد وجود پارامتر دوشاخگی ترابحرانی (p_c) خواهیم بود. شکل ۲ب در پژوهش حاضر را ملاحظه نمایید.

نتیجه‌گیری

در این پژوهش، پایداری و تحلیل دوشاخگی وابسته به انتشار امواج یون-صوتی در یک پلاسما سه مؤلفه‌ای مورد مطالعه قرار گرفته است. برای این منظور، ابتدا یک پلاسما غیرمغناطیده شامل یون‌های سرد با الکترون‌ها و پوزیترون‌های غیرماکسولی (با توزیع کاپا) در نظر گرفته شده و سپس با نوشتن معادلات اساسی حاکم بر یون‌های سرد و انجام محاسبات لازم، معادله دینامیکی سیستم که قادر است خواص مهم انتشار امواج و گذار بین آنها را نشان دهد، تعیین شده است. همچنین مشاهده شده که با افزایش جمعیت پوزیترون‌های پرنرژی (مقادیر کوچک Kp)، مقادیر چگالی آستانه و بحرانی برای ایجاد دوشاخگی نیز کاهش می‌یابند. علاوه بر این، نتایج عددی نشان می‌دهند که امواج سالیوتونی و تناوبی با هر دو قطبیت (پتانسیل مثبت و منفی) و امواج تناوبی با دامنه خیلی بالا قابلیت انتشار در این محیط را دارند. نتایج به‌دست آمده در این پژوهش نشان می‌دهد که ویژگی‌های اساسی جدیدی از انتشار امواج الکترواستاتیک غیرخطی توسط تحلیل

- plasmas with two-temperature electrons: Boltzmann and kappa distributions, *Physics of Plasmas* 20 (2013) 082309. <https://doi.org/10.1063/1.4818888>
- [16] F.C. Michel, Theory of pulsar magnetospheres, *Reviews of Modern Physics* 54 (1982) 1. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.54.1>
- [17] H.R. Miller, P.J. Witta, *Active Galactic Nuclei*, Springer, Berlin (1987).
- [18] C.M. Surko, M. Levethal, W.S. Crane, A. Passner, F. Wysocki, T.J. Murphy, J. Strachan, W.L. Rowan, Use of positrons to study transport in tokamak plasmas, *Review of Scientific Instruments* 57 (1986) 1862. <https://doi.org/10.1063/1.1139154>
- [19] C.M. Surko, T. Murphy, Use of the positron as a plasma particle, *Physics of Fluids B* 2 (1990) 1372. <https://doi.org/10.1063/1.859558>
- [20] M. Tinkle, R.G. Greaves, C.M. Surko, R.L. Spencer, G.W. Mason, Low-order modes as diagnostics of spheroidal non-neutral plasmas, *Physical Review Letters* 72 (1994) 352. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.72.352>
- [21] S.A. El-Tantawy, W.M. Moslem, Arbitrary amplitude ion-acoustic waves in a multicomponent plasma with superthermal species, *Physics of Plasmas* 18 (2011) 112105. <https://doi.org/10.1063/1.3656979>
- [22] A. Shah, S. Mahmood, Q. Haque, Propagation of solitary waves in relativistic electron-positron-ion plasmas with kappa distributed electrons and positrons, *Physics of Plasmas* 18 (2011) 114501. <https://doi.org/10.1063/1.3659469>
- [23] S. Hussain, N. Akhtar, S. Mahmood, Ion acoustic solitary waves in electron-positron-ion magneto-rotating Lorentzian
- [8] M. Maksimovic, V. Pierrard, P. Riley, Ulysses electron distributions fitted with Kappa functions, *Geophysical Physical Research* 24 (1997) 1151.
- [9] M. Krimigis, J.F. Carbary, E.P. Keath, T.P. Armstrong, L.J. Lanzerotti, G. Gloeckler, General characteristics of hot plasma and energetic particles in the Saturnian magnetosphere: Results from the Voyager spacecraft, *Journal of Geophysical Research* 88 (1983) 8871. <https://doi.org/10.1029/JA088iA11p08871>
- [10] V. Pierrard, H. Lamy, J. Lemaire, Exospheric distributions of minor ions in the solar wind, *Journal of Geophysical Research* 109 (2004) A02118. <https://doi.org/10.1029/2003JA010069>
- [11] N.S. Saini, I. Kourakis, M.A. Hellberg, Arbitrary amplitude ion-acoustic solitary excitations in the presence of excess superthermal electrons, *Physics of Plasmas* 16 (2009) 062903. <https://doi.org/10.1063/1.3143036>
- [12] S. Sultana, I. Kourakis, N.S. Saini, M.A. Hellberg, Oblique electrostatic excitations in a magnetized plasma in the presence of excess superthermal electrons, *Physics of Plasmas* 17 (2010) 032310. <https://doi.org/10.1063/1.3322895>
- [13] Y.D. Jung, W.P. Hong, Nonthermal effects on the ion-acoustic solitons in Lorentzian electron-ion plasmas, *Physics of Plasmas* 18 (2011) 024502. <https://doi.org/10.1063/1.3559450>
- [14] T.K. Baluku, M.A. Hellberg, Ion acoustic solitons in a plasma with two-temperature kappa-distributed electrons, *Physics of Plasmas* 19 (2012) 012106. <https://doi.org/10.1063/1.3675866>
- [15] F. Verheest, M.A. Hellberg, I. Kourakis, Ion-acoustic supersolitons in

- [31] A. Saha, P. Chatterjee, Bifurcations of ion acoustic solitary waves and periodic waves in an unmagnetized plasma with kappa distributed multi-temperature electrons, *Astrophysics and Space Science* 350 (2014) 631. <https://doi.org/10.1007/s10509-014-1796-z>
- [32] A. Saha, P. Chatterjee, C.S. Wong, Dynamic motions of ion acoustic waves in plasmas with superthermal electrons. *Brazilian Journal of Physics* 45 (2015) 656–663. <https://doi.org/10.1007/s13538-015-0358-3>
- [33] A. Saha, P. Chatterjee, Bifurcations of dust acoustic solitary waves and periodic waves in an unmagnetized plasma with nonextensive ions, *Astrophysics and Space Science* 351 (2014) 533. <https://doi.org/10.1007/s10509-014-1849-3>
- [34] A. Saha, P. Chatterjee, New analytical solutions for dust acoustic solitary and periodic waves in an unmagnetized dusty plasma with kappa distributed electrons and ions, *Physics of Plasma* 21 (2014) 022111. <https://doi.org/10.1063/1.4864626>
- [35] A. Saha, J. Tamang, Effect of q-nonextensive hot electrons on bifurcations of nonlinear and supernonlinear ion-acoustic periodic waves, *Advances in Space Research* 63 (2019) 1596-1606. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2018.11.010>
- [36] J. Tamang, A. Saha, Bifurcations of small-amplitude supernonlinear waves of the mKdV and modified Gardner equations in a three-component electron-ion plasma, *Physics of Plasmas* 27 (2020) 012105-09. DOI: [10.1063/1.5115821](https://doi.org/10.1063/1.5115821)
- [37] A. Saha, P.K. Prasad, S. Banerjee, Bifurcation of ion-acoustic superperiodic waves in auroral zone of Earth's magnetosphere, *Astrophysics and Space Science* 348 (2013) 475–481. <https://doi.org/10.1007/s10509-013-1576-1>
- [24] N. Akhtar, S. Mahmood, S. Siddiqui, Effect of ion temperature on modulational instability and envelope solitons of ion acoustic waves in nonthermal electron–positron–ion plasmas, *Plasma Physics Controlled Fusion* 56 (2014) 095027. <https://doi.org/10.1088/0741-335/56/9/095027>
- [25] M. Mehdipoor, Dissipative ion-acoustic waves in collisional electron-positron-ion plasmas with Kappa distribution, *Contributions to Plasma Physics* 59 (2019) 7. <https://doi.org/10.1002/ctpp.201900006>
- [26] G.M. Zaslavsky, et al., Large-scale behavior of the tokamak density fluctuations, *Physics of Plasmas* 7 (2000) 3691-3695. DOI: [10.1063/1.1286669](https://doi.org/10.1063/1.1286669)
- [27] M. Nurujjaman, R. Narayanan, A.N. Iyengar, Parametric investigation of nonlinear fluctuations in a dc glow discharge plasma, *Chaos* 17 (2007) 043121-6. <https://doi.org/10.1063/1.2815818>
- [28] A.M. Wharton, et al, Theoretical and numerical modelling of chaotic electrostatic ion cyclotron (EIC) oscillations by Jerk equation, *Physics of Plasmas* 21 (2014) 022311-6. DOI: [10.1063/1.4865823](https://doi.org/10.1063/1.4865823)
- [29] P. Feng, J. Zhang, W. Wang, Spike-like solitary waves in incompressible boundary layers driven by a travelling wave, *Chaos* 26 (2016) 063104-9. <https://doi.org/10.1063/1.4953015>
- [30] S. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, Perseus, Massachusetts, (1994).

- [45] V.I. Karpman, C.A. Norman, D ter Haar, V.N. Tsytovich, Relativistic Solitons and Pulsars, *Physica Scripta* 11 (1975) 271. DOI [10.1088/0031-8949/11/5/006](https://doi.org/10.1088/0031-8949/11/5/006)
- [46] A.E. Dubinov, D.Y. Kolotov, Ion-acoustic supersolitons in plasma, *Plasma Physics Report* 38 (2012) 909-912. <https://doi.org/10.1134/S1063780X12100054>
- [38] P.K. Prasad, A. Saha, Bifurcation analysis of ion-acoustic waves for Schrödinger equation in nonextensive Solar wind plasma, *Advances in Space Research* 67 (2021) 9-19. DOI: [10.1016/j.asr.2020.07.031](https://doi.org/10.1016/j.asr.2020.07.031)
- [39] A. Saha, Nikhil Pal, Prasanta Chatterjee, Dynamic behavior of ion acoustic waves in electron-positron-ion magnetoplasmas with superthermal electrons and positrons, *Physics of Plasmas* 21 (2014) 102101. <http://dx.doi.org/10.1063/1.4896715>
- [40] U.N. Ghosh, A. Saha, N. Pal, P. Chatterjee, Dynamic structures of nonlinear ion acoustic waves in a nonextensive electron-positron-ion plasma, *Journal of Theoretical and Applied Physics* 9 (2015) 321-329. DOI: [10.1007/s40094-015-0192-6](https://doi.org/10.1007/s40094-015-0192-6)
- [41] H. Alinejad, Transcritical bifurcation of nonlinear electrostatic waves in a superthermal dusty plasma, *Waves in Random and Complex Media* (2022) <https://doi.org/10.1080/17455030.2022.2059591>
- [42] H. Alinejad, Effect of dust polarity on transcritical bifurcation of dust ion-acoustic waves in a nonextensive dusty plasma, *Chaos, Solitons and Fractals* 157 (2022) 111907. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2022.111907>
- [43] H. Alinejad, Stability and bifurcation analysis of low-frequency electrostatic waves in warm negative ion plasmas, *Contributions to Plasma Physics* 62 (2022) 9. <https://doi.org/10.1002/ctpp.202200082>
- [44] T.K. Baluku, M.A. Hellberg, I. Kourakis, N.S. Saini, Dust ion acoustic solitons in a plasma with kappa-distributed electrons, *Physics of Plasmas* 17 (2010) 053702. <https://doi.org/10.1063/1.3400229>
- Science 364 (2019) 180. DOI: [10.1007/s10509-019-3671-4](https://doi.org/10.1007/s10509-019-3671-4)