

Traversable wormholes in Einsteinian cubic gravity with variable red-shift functions

Zahra Talebizadeh, *Mohammad Reza Mehdizadeh, Amid Sadeghi Nezhad

Faculty of physics, Shahid Bahonar University of Kermanaz, Iran

Received: 03.05.2023 Final revised: 14.06.2023 Accepted: 10.07.2023

DOI: [10.22055/jrmb.2023.18500](https://doi.org/10.22055/jrmb.2023.18500)

Abstract

In this work, we study wormhole solutions described by a radial dependent red-shift function in Einstein-cubic gravity. We derive wormhole solutions by assuming a particular equation of state and check the standard energy conditions. These solutions by imposing suitable values the parameters of the theory satisfy the weak energy condition in the vicinity of the throat. We calculate the null and time-like geodesic equations in the space-time of the wormhole solutions. In addition, by using these solutions and the effective potential formalism, some geodesics are classified. We discuss the geodesics of the test particles and classify them according to the particle's energy and angular momentum. Finally, using gravitational lensing effects, observational features of the wormhole structure are discussed.

Keywords:

Wormhole. Weak Energy Conditions, Geodesic, Modified Gravity Theories

* Corresponding Author: mehdizadeh.mr@gmail.com

جواب‌های کرمچاله‌ای قابل عبور در گرانش اینشتین-کیوبیک با تابع سرخ‌گرایی‌های متغیر

زهره طالبی‌زاده، محمد رضا مهدی‌زاده*، عمید صادقی‌نژاد

دانشکده فیزیک، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

پذیرش: ۱۴۰۲/۰۴/۱۹

ویرایش نهائی: ۱۴۰۲/۰۳/۲۴

دریافت: ۱۴۰۲/۰۲/۱۳

DOI: [10.22055/jrmbms.2023.18500](https://doi.org/10.22055/jrmbms.2023.18500)

چکیده

در این مقاله، ساختارهای کرمچاله‌ای با تابع سرخ‌گرایی گرانشی شعاعی را در چارچوب گرانش اینشتین-کیوبیک مورد مطالعه قرار می‌دهیم. ما جواب‌های کرمچاله‌ای را با اعمال یک معادله حالت خاص محاسبه و شرایط انرژی آنها را بررسی می‌کنیم. جواب‌های کرمچاله‌ای با انتخاب پارامترهای مناسب می‌توانند شرایط انرژی را در نزدیکی گلوگاه ارضا نمایند. همچنین، معادلات حاکم بر ژئودزی‌های زمان‌گونه و نورگونه را در فضازمان‌های معرف جواب‌های کرمچاله‌ای محاسبه و با استفاده از فرمالیزم پتانسیل مؤثر و با توجه به انرژی و تکانه زاویه‌ای ذرات، این ژئودزی‌ها را مطالعه و دسته بندی می‌کنیم. در پایان با استفاده از محاسبه اثر لنزهای گرانشی، آثار وجود این ساختارها مورد بحث قرار می‌گیرد.

کلیدواژگان: کرمچاله، انرژی ضعیف، ژئودزیک، نظریه‌های گرانش تعمیم‌یافته

مقدمه

در فضا-زمان حفظ نمود. از جمله ساخت کرمچاله‌های پوسته نازک که انرژی بر روی گلوگاه کرمچاله متمرکز می‌شود [۳]. مطالعه کرمچاله‌ها در چارچوب گرانش‌های تعمیم‌یافته می‌تواند به ارضاء شرایط انرژی در گلوگاه و تمام فضا کمک نماید. در گرانش‌های تعمیم‌یافته گاوس بنه [۴]، برنز دیکی [۵]، گرانش $f(R)$ [۶] و برون اینفیلد [۷] جواب‌های کرمچاله‌ای مطالعه شده‌اند. در سال‌های اخیر مطالعه کرمچاله‌ها در گرانش‌های با انحنای مرتبه بالاتر نتایج جالبی به دنبال داشته است از جمله در نظریه گاوس بنه و لاولاک می‌توان شرایط انرژی را در تمام فضا ارضاء نمود [۸].

کرمچاله‌ها، ساختارهای میان‌بری در فضا زمان هستند که دو نقطه از یک جهان یا جهان‌های متفاوت را به هم وصل می‌کنند. کلمه کرمچاله اولین بار توسط ویلر در سال ۱۹۵۷ در مقاله [۱] معرفی شد. مطالعه در این زمینه با مقاله‌های موریس و تورن در سال ۱۹۸۸ با رشد چشمگیری همراه شد. کرمچاله‌های معرفی شده به علت برقراری شرط بازشدگی در گلوگاه شرایط انرژی استاندارد را نقض می‌کنند [۲]. بنابراین یکی از چالش‌های مهم در مورد کرمچاله‌ها، برقراری شرایطی است که بتوان به کمک آنها شرایط انرژی استاندارد را

* نویسنده مسئول: mehdizadeh.mr@gmail.com



محاسبه نموده‌اند و با ترسیم نمودار شرایط انرژی، نشان داده‌اند که شرایط انرژی برای این دسته از جواب‌ها نیز نقض می‌شود. در همه این مدل‌ها آثار مشاهداتی نظیر همگرایی گرانشی و ژئودزی‌ها مورد بررسی قرار نگرفته است. در این پژوهش، ما جواب‌های کرمچاله‌ای با تقارن کروی با تابع سرخ‌گرایی گرانشی غیرصفر در چارچوب گرانش اینشتین-کیوبیک را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در ادامه با معرفی کنش گرانش کیوبیک ابتدا معادلات میدان را محاسبه نموده‌ایم و سپس با اعمال معادله حالت جواب‌های کرمچاله‌ای محاسبه شده‌اند. شرط انرژی ضعیف نیز برای این جواب‌ها مطالعه شده است. در پایان به مطالعه آثار وجود کرمچاله در فضا پرداخته و ژئودزی‌های زمان‌گونه و تهی این دسته از جواب‌ها محاسبه شدند.

کنش و معادلات میدان

کنش گرانش کیوبیک در چهار بعد به صورت زیر تعریف می‌شود

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (L_g + L_m) \quad ۱$$

در رابطه بالا L_m لاگرانژی مربوط به قسمت ماده کنش و L_g لاگرانژی مربوط به قسمت گرانشی کنش است و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$L_g = \frac{1}{2k} [-2\Lambda + R] + k\lambda p \quad ۲$$

در این رابطه $\kappa = 8\pi G$ ثابت جفت‌شدگی گرانش، λ ثابت جفت‌شدگی بدون بعد و R اسکالر ریچی است. جمله p که در کنش گرانش کیوبیک ظاهر شده

در سال‌های اخیر، نظریه‌های گرانشی با مرتبه‌های بالاتر از تانسور انحناء با هدف دستیابی به توصیف کوآتومی از میدان‌های گرانشی مورد توجه واقع شده‌اند. برای نمونه، در نظریه ریمان‌ها جملات گاوس بنه با جملات بالاتر از انحناء به کنش اینشتین-هیلبرت اضافه می‌شوند به گونه‌ای که در معادلات میدان، حداکثر مشتقات مرتبه دوم متریک ظاهر می‌شوند [۹]. به علاوه در مطالعات هولوگرافی، آثار این جملات مورد بررسی قرار گرفته‌اند [۱۰]. اخیراً نظریه گرانشی اینشتین-کیوبیک معرفی شده است که بر پایه مجموعه‌ای مناسب از ترکیبات تانسور ریمان به گونه‌ای بنا نهاده شده است که طیف آن با طیف نسبیت عام تطابق دارد و در آن جملات گوست حضور ندارند. به علاوه میدان‌های گرانشی آن در چهار بعد و ابعاد بالاتر، مستقل از بعد با ماده برهم‌کنش دارند و ثابت جفت‌شدگی مستقل از بعد تعریف شده است. بنابراین می‌توان اثر حضور جملات انحناء بالاتر را در چهار بعد بررسی نمود که در مقالات [۹] دیده می‌شوند. جواب‌های سیاهچاله‌ای این مدل در مقاله [۱۰] با جزئیات بحث شده‌اند. همچنین جواب‌های کرمچاله‌ای این مدل با تابع سرخ‌گرایی گرانشی صفر در مقاله [۱۱] معرفی شده‌اند.

در مقاله [۱۱]، نویسندگان با انتخاب سه نوع مدل برای تابع شکل کرمچاله‌ها، شرایط انرژی کرمچاله‌ها را با توجه به پارامترهای آزاد آن‌ها بررسی نموده‌اند و نشان داده‌اند که برای این دسته از جواب‌های انتخابی، شرایط انرژی تهی در فضا-زمان نقض می‌شود. در مقاله [۱۲]، با استفاده از دو معادله حالت خاص، جواب‌های کرمچاله‌ای را بدون حضور تابع سرخ‌گرایی گرانشی

معرفی می‌شود. به طوری که $\rho(r)$ چگالی انرژی، $p_t(r)$ فشار عرضی و $p_r(r)$ فشار شعاعی است. با استفاده از معادله میدان ۴ و متریک ۶ می‌توان مؤلفه‌های تانسور انرژی-تکانه را صورت زیر به دست آورد:

$$\rho(r) = \frac{\eta\lambda\kappa}{r^9} + \frac{r^2\Lambda - b'}{\kappa r^2} \quad ۸$$

که مقدار η در رابطه زیر تعریف شده است. ۹

$$\begin{aligned} \eta = & 24r^4(r-b)b''^2 - 384\eta_1 r^2(r-b)\varphi'' \\ & - 96r^4(r-b)^3\varphi''^4 + 348r^2\left(-\frac{77}{58}b+r\right)b'^2 \\ & + 264(rb' - \frac{11}{13}b)r^3(r-b)^2\varphi'^3 - 72r^2\eta_2 b'' \\ & + 6\eta_3 r\varphi'' + 30r^3b'^3 + 120[r^2b'^2 \\ & + \frac{3}{5}r(r-3b)b' - \frac{1}{5}b(r-2b)]r^2(r-b)\varphi'^2 \\ & + (-888r^2b + 1026rb^2)b' - 594b^3 \\ & + 24r^3[r(r-b)\varphi'^2 + rb' - 2b](r-b)b''' + 540rb^2 \end{aligned}$$

به طوری که:

۱۰

$$\begin{aligned} \eta_1 = & r^2(r-b)^2\varphi'^2 + \frac{7}{16}r(r-b)(rb' - \frac{b}{7})\varphi' \\ & + \frac{r^2b'^2}{32} + \frac{r(r-b)b'}{8} - \frac{b^2}{32} \end{aligned}$$

۱۱

$$\begin{aligned} \eta_2 = & -r^2(r-b)^2\left(\frac{\varphi''}{3} + \varphi'^2\right) + \frac{r^2}{6}b'^2 \\ & + \frac{r}{6}(r-b)(6r + rb' - 9b)\varphi' \\ & + 3r\left(r - \frac{7b}{6}\right)b' - \frac{13}{3}b\left(-\frac{14b}{13} + r\right) \end{aligned}$$

است به صورت یک جمله انحنای مکعبی در چهار بعد به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$p = 12R_{ab}^{cd}R_{cd}^{mn}R_{mn}^{ab} + R_{cd}^{ab}R_{ab}^{mn}R_{mn}^{cd} - 12R_{abcd}R^{ac}R^{bd} + 8R_a^bR_b^cR_c^a \quad ۳$$

در رابطه فوق R_{abcd} تانسور انحنای ریمان است که برحسب نماد کریستوفل نوشته می‌شود. اگر کنش ۱ را نسبت به متریک وردش دهیم، معادله میدان گرانش کیوبیک به صورت:

۴

$$P_{abcde}R_b^{cde} - \frac{1}{2}g_{ab}L - 2\nabla^c\nabla^d P_{acdb} = \frac{1}{2}T_{ab}$$

به دست می‌آید. T_{ab} تانسور انرژی-تکانه میدان ماده است و P_{acde} به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$P_{acde} = \frac{\partial L}{\partial R^{abcd}} \quad ۵$$

در ادامه متریک توصیف‌کننده کرمچاله‌های استاتیک و قابل عبور موریس تورن به صورت زیر معرفی می‌شود [۱۶].

۶

$$ds^2 = -e^{2\varphi(r)}dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\Phi^2)$$

$b(r)$ تابع شکل کرمچاله و $\varphi(r)$ تابع سرخ‌گرایی گرانشی است. تابع شکل باید شرط بازشدگی را ($b'(r_0) < 1$) در گلوگاه کرمچاله ارضا کند، که در آن r_0 شعاع گلوگاه است. تانسور انرژی-تکانه به شکل قطری:

$$T_b^a = \text{diag}[\rho(r), p_r(r), p_t(r), p_t(r)] \quad ۷$$

$$\gamma_3 = 12r^3b'^3 - 144r[r^2 - \frac{11rb}{2}] \quad ۱۲$$

$$+ \frac{49b^2}{12}]b' - 804rb^2 \quad ۱۷$$

$$- 180(r - \frac{11b}{15})r^2b'^2 \quad ۱۳$$

$$+ 240r^2b + 540b^3$$

معرفی می‌شوند. فشار عرضی از رابطه:

$$p_t(r) = \frac{\delta\lambda\kappa}{r^8} + \frac{(r - \frac{b}{2} - \frac{rb'}{2})\varphi'}{\kappa r^2} \quad ۱۸$$

$$+ \frac{(r^3\Lambda + \frac{b}{2} - \frac{rb'}{2})}{\kappa r^3}$$

$$+ \frac{(r-b)\varphi'^2 + (r-b)\varphi''}{\kappa r}$$

محاسبه می‌شود به طوری که δ برابر است با:

$$\delta = -168r^2(r-b)\delta_1\varphi''' + \delta_2r\varphi'' + 24r^4(r-b)\varphi'b''^2$$

$$- 312r^4(r-b)^2[(r-b)\varphi' - \frac{2b'}{13}]\varphi'^2$$

$$- 72r^4(r-b)^3\varphi'^5 + 288r^3(r-b)^2[rb'$$

$$+ \frac{2r-21}{19}]\varphi'^4 + 36\delta_3r^2\varphi'b'' - 42[r^2b'^2$$

$$+ (18/7r^2 - 4b)b' - \frac{6b}{7}(r - \frac{3b}{2})]r^2(r-b)\varphi'^3$$

$$+ r\delta_4\varphi'^2 - 24r^3(r-b)^2[r(r-b)\varphi' + rb'$$

$$- 2b](\frac{d^4\varphi}{dr^4} + \delta_5\varphi' - 12(r-b)[2r(r-b)\varphi''$$

$$+ (r(r-b)\varphi' + 5b - 2r - 2rb')\varphi']r^3b'''$$

عبارات مربوط به δ_1 تا δ_5 در زیر تعریف شده‌اند:

$$\eta_3 = r^3b'^3 + (-17br^2 + 16r^3)b'^2$$

$$+ (16r^3 - 40br^2 + 23rb^2)b' - 8b^2 + 9b^3$$

فشار شعاعی به صورت:

$$p_r(r) = \frac{\gamma\lambda\kappa}{r^8} + \frac{(r^3\Lambda - b) + 2r^6(r-b)\varphi'}{\kappa r^3}$$

محاسبه می‌شود به طوری که γ برابر است با:

$$\gamma = -48r^2(r-b)^2[r(r-b)\varphi'$$

$$+ rb' - 2b]\varphi'' - 288\gamma_1r(r-b)\varphi''$$

$$- 240r^3(r-b)^3\varphi'^4 - 48r^3(r-b)^3\varphi''^2$$

$$+ 36\gamma_2r(r-b)\varphi'^2 + 72\varphi'[rb' + \frac{2r}{3}$$

$$- \frac{7b}{3}]r^2(r-b)b'' + \gamma_3\varphi'$$

$$+ 48r^2(r-b)^2(r-2b)\varphi'3$$

γ_i ها به ازای $i = 1, 2, 3$ به صورت:

$$\gamma_1 = \frac{r^2}{6}(r-b)b'' + r^2(r-b)^2\varphi'^2$$

$$+ \frac{r}{6}(r-b)(rb' - 3b)\varphi' - \frac{r^2b'^2}{6} \quad ۱۵$$

$$- \frac{r}{2}(r-2b)b' + \frac{5}{6}(r - \frac{7b}{5})b$$

$$\gamma_2 = r^2b'^2 + 4/3(r-7/2b)rb'$$

$$- 8rb(r) + 9b^2(r) + \frac{4r^2}{3} \quad ۱۶$$

$$\delta_5 = 492r^2(r - \frac{207}{164}b)b'^2 - r(-336r^2 + 1944rb - 1767b^2)b' + 33r^3b'^3 + 1740rb^2 - 480r^2b - 1323b^3$$

شرایط انرژی ضعیف برای تانسور انرژی تکانه قطری ۷ که مربوط به یک سیال کامل است، به صورت $\rho(r) + p_r(r) \geq 0$ و $\rho(r) \geq 0$ بیان می‌شوند. با استفاده از مؤلفه‌های تانسور انرژی تکانه می‌توان شرایط انرژی ضعیف را در کل فضا محاسبه کرد. همچنین با اعمال شرط $b(r_0) = r_0$ این شرایط در گلوگاه کرمچاله به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\rho(r_0) = -\frac{\chi}{r_0^9 \kappa} \lambda - \frac{r_0^2 \Lambda - b'}{\kappa} \quad 25$$

به طوری که χ به شکل:

$$\chi = -72(\frac{r_0^2}{6}b'^2 - \frac{r_0^2 b'}{2} + \frac{r_0^2}{3})\kappa^2 r_0^2 b'' + 6(r_0^3 b'^3 - r_0^3 b'^2 - r_0^3 b' + r_0^3)\kappa^2 r_0 \varphi' - 114\kappa^2 r_0^3 b' + 138\kappa^2 r_0^3 b' + 30\kappa^2 r_0^3 b'^3 - 54\kappa^2 r_0^3$$

تعریف می‌شود.

$$\rho(r_0) + p_r(r_0) = -\frac{\psi \kappa}{r_0^9} \lambda + \frac{r_0 b' - r_0}{r_0^3} \quad 27$$

که ψ به صورت:

$$\delta_1 = \frac{3r^2}{7}(r-b)^2 \varphi'' + \frac{2r^2}{7}(r-b)b'' - \frac{3r^2 b'^2}{7} + r^2(r-b)^2 \varphi'^2 - \frac{r}{7}(r-b)(rb' + 2b)\varphi' - \frac{6r}{7}(r - \frac{5b}{2})b' + \frac{9b}{7}(r - \frac{5b}{3})$$

۲۱

$$\delta_2 = -60r^2(r-b)[r(r-b)\varphi' + 5b - 2r - \frac{11}{5}rb'b'' + 492r^2(r-b)^2 \varphi'^2 [rb' + \frac{6r-43b}{41}] - 18r^3 b'^3 - 432r^3(r-b)^3 \varphi'^3 - 336rb'[\frac{229}{56}b^2 - \frac{135}{28}rb + r^2] + \frac{114}{19}[19r^2 b'^2 + 40(r - \frac{13b}{5})rb' + 8r^2 + 129b^2 - 8rb]r(r-b)\varphi' - 1554rb^2 - 354r^2(r - \frac{71b}{59})b'^2 + 480r^2b + 1110b^3$$

۲۲

$$\delta_3 = r^2(r-b)^2 \varphi'^2 + \frac{17r}{6}(r-b)[\frac{14r}{17} + rb' - \frac{37}{17}b]\varphi' - \frac{r^2}{3}b'^2 - 7r(r - \frac{47}{42}b)b' - \frac{77}{6}b^2 + \frac{47}{3}rb - \frac{10r^2}{3}$$

۲۳

$$\delta_4 = -336r[\frac{395}{112}b^2 - \frac{121}{28}rb + r^2]b' + 1053b^3 - 15r^3 b'^3 - 282r^2(r - \frac{113b}{94})b'^2 + 624r^2b - 48r^3 - 1602rb^2$$

۲۴

۲۸ $\phi(r)$ به یک معادله مستقل از سه معادله میدان نیاز

است. بنابراین معادله حالت $p_t - \alpha p_r = 0$ معرفی می‌شود که به کمک آن می‌توان دسته خاصی از جواب‌های کرمچاله‌ای را محاسبه نمود. معادله حالت $p_t - \alpha p_r = 0$ در شکل کلی دارای مشتقات مرتبه چهارم $\phi(r)$ و مشتقات مرتبه سوم $b(r)$ است. مشتقات مرتبه بالا باعث می‌شود که حل معادله دیفرانسیل حاصل بسیار پیچیده شود. بنابراین در ادامه با فرض ثابت‌های جفت‌شدگی کوچک معادله دیفرانسیل زیر حاصل می‌شود.

۳۱

$$2r \left(r \left(\alpha - \frac{b'+1}{2} \right) + \left(\frac{1}{4} - \alpha \right) b \right) \phi' + r^2 (b-r)(\phi'^2 + \phi'') + \frac{r}{2} b' - \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) b = 0$$

با حل معادله بالا می‌توان $b(r)$ و $\phi(r)$ را محاسبه نمود. با فرض صفر بودن عبارت داخل کروشه دوم، معادله دیفرانسیل:

$$rb' - (1 + 2\alpha)b = 0 \quad ۳۲$$

حاصل می‌شود که از حل آن، تابع شکل $b(r)$ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\frac{b}{r} = \left(\frac{r}{r_0} \right)^{2\alpha} \quad ۳۳$$

شرط بازشدگی باید در گلوگاه کرمچاله برقرار باشد. یعنی:

$$b'(r_0) < 1 \Rightarrow 2\alpha + 1 < 1 \Rightarrow \alpha < 0 \quad ۳۴$$

که مقدار α منفی می‌باشد. در نتیجه از رابطه ۳۳ مشخص است که جواب‌های کرمچاله مجانباً تخت

$$\begin{aligned} \psi = & 72 \left(\frac{b'^2}{6} - \frac{b'}{2} + \frac{1}{3} \right) r_0^4 b'' \\ & + 6r_0^2 (-5b'^2 + 14b' - 9)(1 + r_0(b' - 1)) \\ & + 6r_0^3 [\kappa^2 b'^3 + (11b' - 5 - 7b'^2)r_0] \phi' \end{aligned}$$

معرفی می‌شود.

۲۹

$$\begin{aligned} \rho(r_0) + p_t(r_0) = & \frac{\omega \kappa \lambda}{r_0^9} \\ & + \frac{(r_0(1-b') + \phi' + b' + 1)}{2r_0^2} \end{aligned}$$

به طوری که ω برابر است با:

۳۰

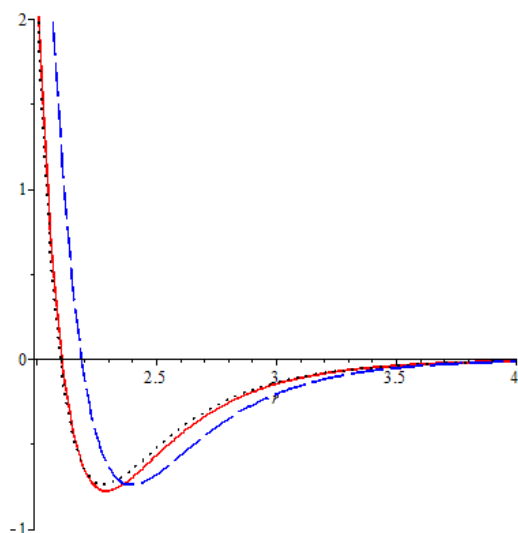
$$\begin{aligned} \omega = & r_0^5 (-18b'^3 - 90b' + 36 + 72b'^2) \phi'' \\ & - r_0^3 (138b' + 30b'^3 - 114b'^2 - 54) + b'^2 \\ & - 12 \left((b'^2 - \frac{5b'+3}{2}) r_0 \phi' + 3b' - 2 \right) r_0^4 b'' \\ & + (-15b'^3 - 69b' + 27 + 57b'^2) r_0^5 \phi'^2 \\ & - (123b'^2 - 165b' - 27b'^3 + 69) r_0^4 \phi' \end{aligned}$$

از آنجا که شرط بازشدگی باید در گلوگاه کرمچاله برقرار باشد، این موضوع باعث می‌شود برای حالت $\lambda = 0$ شرایط انرژی ضعیف در گلوگاه کرمچاله نقض شوند.

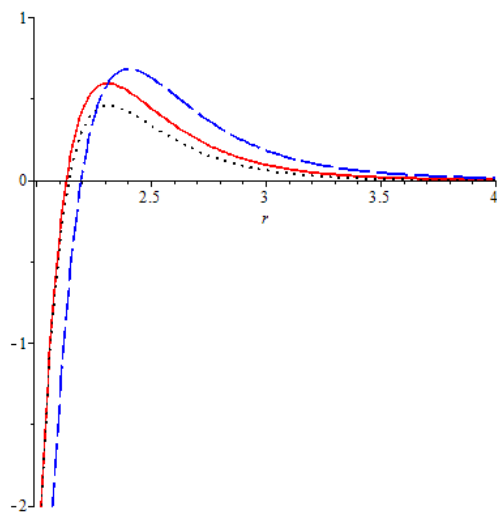
جواب‌های کرمچاله‌ای

در این بخش ابتدا با استفاده از معادله حالت جواب‌های کرمچاله‌ای مشخص می‌شوند و سپس شرایط انرژی ضعیف مورد بررسی قرار می‌گیرند. برای محاسبه تابع شکل $b(r)$ و تابع سرخ‌گرایی گرانشی

نمودار ۲ نشان می‌دهد که به‌ازای مقادیر منفی λ شرایط انرژی ضعیف و تهی در نزدیکی گلوگاه کرمچاله نقض می‌شود.



شکل ۱. نمودار ρ (قرمز)، $\rho + p_r$ (مشکی) و $\rho + p_t$ (آبی) برحسب r . به‌ازای $r_0 = 2$ ، $\alpha = -0.4$ ، $\lambda = 0.2$ ، $\kappa = 1$ ، $\varphi_1 = 0.8$ و $\varphi_0 = 0.2$



شکل ۲. نمودار ρ (قرمز)، $\rho + p_r$ (مشکی) و $\rho + p_t$ (آبی) برحسب r . به‌ازای $r_0 = 2$ ، $\alpha = -0.4$ ، $\lambda = -0.2$ ، $\kappa = 1$ ، $\varphi_1 = 0.8$ و $\varphi_0 = 0.2$

هستند یعنی اگر از گلوگاه کرمچاله خیلی دور شویم $(r \rightarrow \infty)$ آنگاه $\frac{b(r)}{r}$ به سمت صفر میل می‌کند. حال می‌توان با استفاده از معادله ۳۱ و تابع شکل $b(r)$ ، تابع سرخ‌گرایی گرانشی را محاسبه کرد.

$$\varphi(r) = \ln(\varphi_0 \sqrt{1 - (\frac{r}{r_0})^{2\alpha} + \varphi_1}) \quad 35$$

φ_0 و φ_1 مقادیر مثبت و ثابتی هستند. از رابطه بالا مشخص است که تابع سرخ‌گرایی گرانشی به‌ازای تمام مقادیر r متناهی است. زیرا اگر r حداقل مقدار ممکن $(r = r_0)$ را اخذ کند آن‌گاه رابطه ۳۵ به صورت $\ln(\varphi_1)$ به دست می‌آید که یک مقدار متناهی است.

اگر r به سمت بی‌نهایت میل کند، آنگاه $(\frac{r}{r_0})^{2\alpha}$ به صفر میل می‌کند. با جانشین نمودن $b(r)$ از معادله ۳۳ و $\phi(r)$ از معادله ۳۵ در معادلات ۱۳ و ۱۸ می‌توان

شرایط انرژی را در تمام فضا به دست آورد. همچنین می‌توان با اعمال شرط $b(r_0) = r_0$ در شرایط انرژی مربوط به کل فضا، این شرایط را در گلوگاه کرمچاله به دست آورد. نمودارهای مربوط به شرایط انرژی

ضعیف در شکل‌های ۱ و ۲ ترسیم شده‌اند. با توجه به نمودارها مشخص است که در فاصله‌های خیلی دور از گلوگاه کرمچاله یعنی جایی که r به بی‌نهایت میل می‌کند هر سه نمودار $\rho(r)$ ، $\rho(r) + p_r(r)$ و $\rho(r) + p_t(r)$ به صفر نزدیک می‌شوند، یعنی در

فضاهای خیلی دور از گلوگاه کرمچاله چگالی ماده به صفر می‌رسد. نمودار ۱ نشان می‌دهد که به‌ازای مقادیر مثبت λ شرایط انرژی ضعیف و در نتیجه شرایط انرژی تهی در نزدیکی گلوگاه کرمچاله برآورده می‌شود، اما

$$\dot{r}^2 = \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \left(E^2 e^{-2\varphi(r)} - \frac{L^2}{r^2} + \varepsilon\right) \quad ۳۹$$

به دست می‌آید. همچنین فاصله شعاعی ویژه به صورت:

$$l(r) = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{\left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)^{1/2}} \quad ۴۰$$

معرفی می‌شود. و مقدار آن از $-\infty$ تا $+\infty$ متغیر است. به طوری که در جهان بالایی $l > 0$ ، در جهان پایینی $l < 0$ و در گلوگاه کرمچاله $l = 0$ است. می‌توان رابطه ۴۰ را با استفاده از فاصله شعاعی ویژه بازنویسی کرد.

$$e^{2\varphi(l)} \dot{l}^2 + V_{eff}(L, l) = E^2 \quad ۴۱$$

V_{eff} پتانسیل مؤثر نام دارد و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$V_{eff}(L, l) = e^{2\varphi(l)} \left(\frac{L^2}{r(l)^2} - \varepsilon \right) \quad ۴۲$$

اگر در معادله بالا به جای $\varphi(r)$ رابطه ۳۵ جای گذاری شود، آنگاه پتانسیل مؤثر مربوط به کرمچاله مورد بحث در اینجا به دست می‌آید.

۴۳

$$V_{eff}(L, l) = \left[\varphi_0 \sqrt{1 - \left(\frac{r(l)}{r_0}\right)^{2\alpha}} + \varphi_1 \right]^2 \left(\frac{L^2}{r(l)^2} - \varepsilon \right)$$

حال با استفاده از رابطه بالا، می‌توان مسیر حرکت ذرات را در اطراف کرمچاله بررسی کرد. کرمچاله‌های قابل عبور این ویژگی را دارند که ذرات می‌توانند از طریق گلوگاه کرمچاله از یک نقطه فضا به نقطه‌ای دیگر حرکت کنند. رفتار یک ذره که در نزدیکی گلوگاه

مسیر حرکت ذرات در اطراف کرمچاله

در این بخش ابتدا با استفاده از فرمالیسم لاگرانژی پتانسیل مؤثر [۱۲] محاسبه و سپس با استفاده از آن مسیر حرکت ذرات در اطراف کرمچاله مطالعه می‌شود. برای سادگی محاسبات، به علت تقارن می‌توان حرکت ذرات و لاگرانژی را در صفحه $\theta = \frac{\pi}{2}$ به صورت زیر نوشت.

۳۶

$$L = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -e^{2\varphi(r)} \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} + r^2 \dot{\varphi}^2$$

در رابطه بالا مشتق نسبت به پارامتر همگرا σ است. چون لاگرانژین در طول ژئودزی ثابت است، بنابراین می‌توان $\mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu) = \varepsilon$ فرض کرد. $\varepsilon = 0$ مربوط به ژئودزی‌های نورگونه و $\varepsilon = -1$ مربوط به ژئودزی‌های زمان‌گونه است. با استفاده از معادله اوپلر-لاگرانژ می‌توان معادلات حرکت ذرات و ذرات بدون جرم را محاسبه نمود.

$$\frac{d}{d\sigma} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \quad ۳۷$$

با استفاده از معادله بالا می‌توان ثابت‌های حرکت زیر را نوشت.

$$\dot{t} = e^{-2\varphi(r)} E, \quad r^2 \dot{\varphi} = L \quad ۳۸$$

E انرژی ذره و L تکانه زاویه‌ای ذره آزمون را نشان می‌دهد. حال اگر ثابت‌های حرکتی که از دو معادله اخیر به دست آمد در رابطه ۳۶ جانشین شود، معادله:

دایره‌ای ناپایدار گردش می‌کند. قابل توجه است که این شرایط مستقل از آن هستند که ژئودزیک مورد نظر نورگونه یا زمان‌گونه است. برای به دست آوردن نقاط اکسترمم تابع پتانسیل مؤثر باید از این تابع نسبت به فاصله شعاعی مشتق گرفت و مشتق به دست آمده را برابر صفر قرار داد. آنگاه از حل معادله حاصل نقاط اکسترمم به دست می‌آیند. با استفاده از قاعده زنجیره‌ای، مشتق پتانسیل مؤثر در حالت کلی، برحسب هر تابع شکل $b(r)$ و هر تابع سرخ‌گرایی گرانشی $\Phi(r)$ به صورت:

۴۵

$$\frac{dV}{dl} = \frac{dV}{dr} \frac{dr}{dl} = \frac{2e^{\rho}(r^2\phi' - L^2 - r^3\phi'\epsilon)}{r^3} \sqrt{1 - \frac{b}{r}}$$

حاصل می‌شود. اگر در معادله ۴۶ به جای $b(r)$ رابطه ۳۳ و به جای $\Phi(r)$ رابطه ۳۵ جانشین شود آنگاه مشتق پتانسیل مؤثر ذره‌ای که اطراف کرمچاله مورد بحث در این مقاله وجود دارد، به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\frac{dV}{dl} = -\frac{2L^2\zeta(\phi_1 + \phi_0\zeta^2)^2}{r^3} - \frac{2\alpha\phi_0\left(\frac{L^2}{r^2} - \epsilon\right)(\phi_1 + \phi_0\zeta^2)}{r(\zeta^2 + 1)} \quad 46$$

به طوری که ζ به صورت عبارت زیر تعریف می‌شود:

$$\zeta = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2\alpha}} \quad 47$$

از حل معادله $\frac{dV}{dl} = 0$ نقاط اکسترمم پتانسیل به دست می‌آیند. برای پیدا نمودن جواب‌های این معادله ابتدا باید به جای $r(l)$ معکوس تابع فاصله شعاعی جانشین

کرمچاله قرار دارد بسته به انرژی آن ذره متفاوت است. اگر $E^2 > V_{eff}(L, l_{max})$ آنگاه ذره از گلوگاه عبور می‌کند و وارد جهانی دیگر می‌شود. اگر $E^2 < V_{eff}(L, l_{max})$ آنگاه ذره نمی‌تواند از گلوگاه عبور کند. در این صورت بسته به اینکه ذره چه مقدار انرژی دارد و در چه فاصله ابتدایی قرار می‌گیرد، رفتارهای متفاوتی مشاهده می‌شود. اگر انرژی ذره از مقدار بیشینه پتانسیل مؤثر کمتر باشد و فاصله شعاعی ذره از فاصله شعاعی نقطه بیشینه پتانسیل مؤثر بیشتر باشد، آنگاه ذره نمی‌تواند از گلوگاه عبور کند. بلکه تا نزدیک‌ترین فاصله به گلوگاه کرمچاله نزدیک می‌شود و سپس به همان جهان اولیه بازمی‌گردد. این برگشت در نقطه $l = l_{tu}$ رخ می‌دهد که نقطه بازگشت نام دارد و از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$E^2 = V_{eff}(L, l_{tu}) \quad 44$$

اگر فاصله شعاعی ذره از فاصله شعاعی نقطه بیشینه پتانسیل مؤثر کمتر باشد آنگاه ذره در گلوگاه کرمچاله محبوس می‌شود و به طور مداوم حرکت رفت و برگشتی انجام می‌دهد و با انرژی کمتر از پتانسیل مؤثر، هرگز نمی‌تواند از گلوگاه عبور کند. یک حالت دیگر که ممکن است ذره نزدیک گلوگاه کرمچاله آن را تجربه کند این است که $E^2 = V_{eff}(L, 0)$. در این صورت ذره آزمون در محل گلوگاه ($l = 0$) روی یک مدار دایره‌ای قرار می‌گیرد و بسته به اینکه نقطه $l = 0$ بیشینه نسبی یا کمینه نسبی است ذره رفتار متفاوتی از خود نشان می‌دهد. اگر $l = 0$ کمینه نسبی باشد آنگاه ذره روی یک مدار دایره‌ای پایدار گردش می‌کند ولی اگر $l = 0$ بیشینه نسبی باشد آنگاه ذره روی یک مدار

$$l(r) = \pm r_2 F_1 \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2\alpha}, 1 + \frac{1}{2\alpha}, \left(\frac{r}{r_0} \right)^{2\alpha} \right] - r_0 \sqrt{\pi} \frac{\Gamma \left[\frac{2\alpha+1}{2\alpha} \right]}{\Gamma \left[\frac{\alpha+1}{2\alpha} \right]}$$

که F_1 تابع هایپرژئومتریک^۱ است. از آنجا که پتانسیل مؤثر تابعی از فاصله شعاعی ویژه است، بنابراین باید بتوان با استفاده از معکوس رابطه ۵۰ تابع پتانسیل مؤثر را به دست آورد. ولی متأسفانه به دلیل اینکه رابطه ۵۰ در حالت کلی تابع معکوس صریح ندارد. بنابراین نمایش صریحی برای پتانسیل مؤثر به عنوان تابعی از فاصله شعاعی وجود ندارد. اما می‌توان با استفاده از تکنیک‌های استاندارد عددی معکوس آن را به دست آورد. روش کلی برای نمایش پتانسیل مؤثر برحسب فاصله شعاعی ویژه به کارگیری بسط تیلور است [۱۳]. با استفاده از بسط تیلور حول گلوگاه (یعنی $b(r_0)$ می‌توان پتانسیل را در نزدیکی گلوگاه به صورت:

$$V(L, l) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} V^{(n)}(L, 0) l^n \quad 51$$

نوشت. ضرایب بسط با استفاده از قاعده زنجیره‌ای به دست می‌آیند. اگر در رابطه $l(r)$ تابع شکل ۳۳ جانشین شود، آن‌گاه $\frac{dr}{dl}$ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\frac{dr}{dl} = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^{2\alpha}} \quad 52$$

بنابراین ضرایب بسط تا مرتبه دوم به صورت زیر محاسبه شده‌اند.

۵۳

شود اما به دلیل اینکه نمی‌توان $l(r)$ را به صورت صریح محاسبه نمود، نمی‌توان جواب کلی برای نقاط اکسترمم تابع پتانسیل مؤثر به دست آورد. با این حال در ادامه روش‌های عددی برای حل این معادله و رسم نمودار پتانسیل مؤثر ارائه خواهد شد. برای اینکه مشخص شود که نقاط به دست آمده از رابطه $\frac{dV}{dl} = 0$ بیشینه نسبی یا کمینه نسبی هستند، مشتق مرتبه دوم پتانسیل به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\frac{d^2V}{dl^2} = \Omega \zeta^2 + \frac{2\alpha L^2}{r^4} (\varphi_1 + \varphi_0 \zeta) (\zeta^2 + 1) - \frac{\varphi_0 \alpha (\varphi_1 + \varphi_0 \zeta) \left(\frac{L^2}{r^2} - \varepsilon \right)}{r \zeta} (\zeta^2 + 1) \quad 48$$

به طوری که Ω به صورت زیر تعریف می‌شود.

۴۹

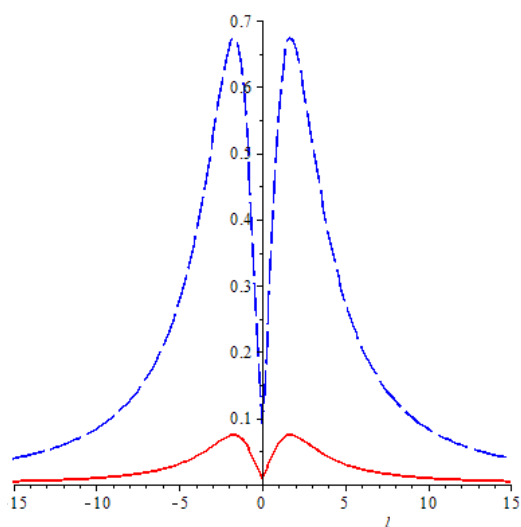
$$\Omega = \frac{2L^2}{\zeta r^4} (\varphi_1 + \varphi_0 \zeta) (3\zeta (\varphi_1 + \varphi_0 \zeta) + 4\alpha (\zeta^2 + 1)) + \frac{2\alpha \varphi_0}{r^2 \zeta^3} \left(\frac{L^2}{r^2} - \varepsilon \right) [\alpha (\zeta^2 + 1)^2 (\varphi_1 + 2\varphi_0 \zeta) + \zeta^2 (\zeta^2 + 1) (\varphi_1 + \varphi_0 \zeta) (1 - 2\alpha)]$$

اگر مشتق مرتبه دوم در نقطه‌ای منفی شود، در این صورت آن نقطه، بیشینه تابع پتانسیل مؤثر را نشان می‌دهد. در ادامه سعی می‌شود که نمودار پتانسیل مؤثر برحسب فاصله شعاعی ویژه (l) ترسیم شود و این نمودار مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد. اگر تابع شکل ۳۳ در معادله ۴۱ جانشین شود، رابطه زیر حاصل می‌شود.

۵۰

¹ Hypergeometric function

جهان پایینی در محلی باشد که فاصله شعاعی آن کمتر از $l = -2$ باشد) آنگاه ذره با توجه به مقدار انرژی که دارد تا فاصله معینی به گلوگاه نزدیک می‌شود و سپس به جهان اولیه باز می‌گردد. اما اگر ذره آزمون در فاصله شعاعی بین گلوگاه و $l = 2$ (در جهان پایینی بین گلوگاه و $l = -2$) باشد، آنگاه به دلیل اینکه انرژی ذره از بیشینه پتانسیل مؤثر آن کمتر است، ذره نمی‌تواند از گلوگاه کرمچاله عبور کرده و وارد جهان دیگر شود بلکه در گلوگاه محبوس می‌شود و در آنجا حرکت رفت و برگشتی انجام می‌دهد.



شکل ۳. نمودار V_{eff} بر حسب l . $\alpha = 0$, $\varphi_1 = \varphi_0 = 2$, $r_0 = 2$. $L = 1$ (قرمز) و $L = 3$ (آبی).

$$V^0(l, 0) = \left(\frac{L^2}{r_0^2} - \varepsilon \right) \varphi_1^2$$

$$V^1(l, 0) = \frac{-2\alpha\varphi_0\varphi_1}{r_0} \left(\frac{L^2}{r_0^2} - \varepsilon \right)$$

$$V^2(l, 0) = \frac{1}{r_0^2} \left(\alpha L^2 \varphi_1^2 + \alpha^2 \varphi_0^2 \left(\frac{L^2}{r_0^2} - \varepsilon \right) \right)$$

بنابراین به‌ازای فاصله شعاعی کوچک می‌توان با استفاده از بسط تیلور نمودار پتانسیل مؤثر را برحسب فاصله شعاعی ویژه ترسیم نمود. ما در اینجا نمودار پتانسیل مؤثر را برای حالت خاص $\alpha = -1$ ترسیم می‌کنیم. به‌ازای $\alpha = -1$ معکوس معادله ۵۰ به صورت زیر است.

$$r(l) = \sqrt{l^2 + r_0^2} \quad 54$$

با جانشین کردن رابطه بالا در تابع پتانسیل مؤثر ۴۴ معادله زیر به دست می‌آید.

۵۵

$$V(L, l) = \left(\frac{L^2}{l^2 + r_0^2} - \varepsilon \right) \left(\varphi_1 + \varphi_0 \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{l^2 + r_0^2}} \right)^2$$

حال می‌توان نمودار پتانسیل را برحسب فاصله شعاعی ویژه برای ژئودزیک‌های نورگونه و زمان‌گونه ترسیم نمود. با توجه به شکل‌های ۳ و ۴ مشخص است که تابع پتانسیل دارای یک کمینه در محل گلوگاه کرمچاله است. بنابراین در صورتی که انرژی ذره با پتانسیل مؤثر آن برابر باشد ($E^2 = V_{eff}(L, 0)$)، ذره در محل گلوگاه روی یک مدار دایره‌ای پایدار گردش می‌کند. همچنین این تابع دارای دو بیشینه در محل‌های $l = 2$ و $l = -2$ است. به‌علاوه از نمودارها مشخص است که اگر انرژی ذره آزمون از بیشینه پتانسیل مؤثر آن بیشتر باشد ذره از گلوگاه کرمچاله عبور خواهد کرد و وارد جهان دیگر می‌شود. ولی اگر انرژی ذره کمتر از بیشینه پتانسیل مؤثر آن باشد آن‌گاه دو حالت رخ می‌دهد اگر ذره در محلی بعد از $l = 2$ باشد (یا در

در این رابطه $\beta = \frac{L}{E}$ پارامتر برخورد است. رابطه بالا از حذف dt از روابط ۳۹ و ۴۰ به دست آمده است. واضح است که این رابطه صرفاً برای ذرات نورگونه صادق است. از آنجایی که r_c کمترین فاصله تا گلوگاه است، یعنی کمترین مقداری است که مختصه شعاعی می‌تواند اخذ کند. لذا $\frac{dr}{d\varphi}$ در محل $r = r_c$ دارای مقدار صفر است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که $\beta = r_c e^{-\varphi(r_c)}$. حال می‌توان با استفاده از رابطه ۵۶ میزان انحراف پرتو نوری که از نزدیکی کرمچاله‌ای با تابع شکل ۳۳ و تابع سرخ‌گرایی ۳۵ عبور می‌کند را به دست آورد.

۵۷

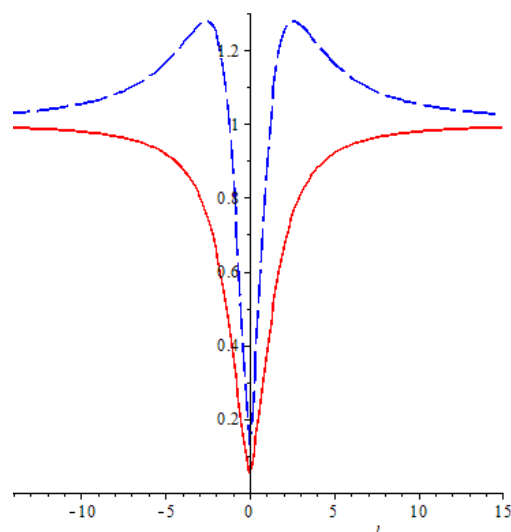
$$\Theta(r_c, \alpha) = -\pi + 2 \int_{r_c}^{\infty} \frac{(\varphi_1 + \varphi_0 r^\alpha) \sqrt{r^{-2\alpha} - r_0^{-2\alpha} \Sigma}}{r_c^{-1} r^{\alpha+1} \sqrt{r^{-2\alpha} - r_0^{-2\alpha} \Sigma}} dr$$

به طوری که Σ به صورت:

۵۸

$$\Sigma = -2r_c^2 r^\alpha \varphi_1 \varphi_0 \sqrt{r^{-2\alpha} - r_0^{-2\alpha}} + r^{2\alpha} r_0^{-2\alpha} r_c^2 \varphi_0^2 + r^2 - r_c^2 (\varphi_0^2 + \varphi_1^2)$$

تعریف می‌شود. در شکل ۷ نمودار میزان خمیدگی پرتو نور برحسب r_c به ازای چهار مقدار متفاوت از α رسم شده است. این نمودار چگونگی وابستگی زاویه انحراف را نسبت به پارامتر معادله حالت (α) و فاصله r_c نشان می‌دهد. نمودار ۷ نشان می‌دهد که به ازای $r_0 < r_c < \infty$ ، زاویه انحراف متناهی است. و هرچه r_c به گلوگاه کرمچاله نزدیک‌تر شود، میزان زاویه انحراف افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر هرچه پرتو نور به میدان گرانشی نزدیک‌تر باشد میزان خمیدگی آن هم بیشتر خواهد بود به طوری که در گلوگاه کرمچاله که میدان گرانشی به شدت قوی است، زاویه انحراف نور به بی‌نهایت میل می‌کند و تصویری که آن پرتو نور در گلوگاه کرمچاله تشکیل می‌دهد، یک کره فوتونی پایدار



شکل ۴. نمودار V_{eff} برحسب l . $r_0 = 2$, $\alpha = -1$, $\epsilon = -1$. $L = 3$ (آبی) و $L = 1$ (قرمز). $\varphi_1 = 0.2$, $\varphi_0 = 0.8$

همگرایی گرانشی

ساختار کرمچاله‌ها در فضا می‌تواند باعث آثار قابل مشاهده‌ای مانند همگرایی گرانشی شود. از این رو به کمک جواب‌های کرمچاله‌ای که در بخش قبل محاسبه شدند، اثر همگرایی گرانشی این جواب‌ها بررسی خواهد شد. پرتو نور تابش شده در مسیر حرکت خود با یک میدان گرانشی قوی که ناشی از حضور کرمچاله است، مواجه می‌شود و حداکثر تا فاصله r_c به گلوگاه کرمچاله نزدیک می‌شود. در این صورت کرمچاله مانند یک عدسی گرانشی عمل می‌کند و باعث خم شدن پرتو نور می‌شود. با استفاده از زاویه انحراف می‌توان میزان خمیدگی نور را اندازه گرفت. زاویه انحراف پرتو نور برای کرمچاله‌هایی که با متریک موریس-تورن معرفی می‌شوند به شکل زیر قابل محاسبه است [۱۴].

۵۶

$$\Theta(r_c) = -\pi + 2 \int_{r_c}^{\infty} \frac{e^{\varphi(r)} dr}{r^2 \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{e^{2\varphi(r)}}{r^2}\right)}$$

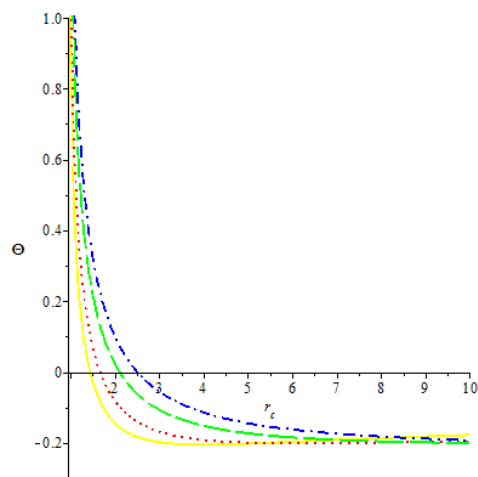
بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، با معرفی متریک کرمچاله‌های متقارن کروی و استاتیک جواب‌های کرمچاله‌ای عبور پذیر با تابع سرخ‌گرایی غیر صفر در چارچوب گرانش انیشتین-کیوبیک معرفی شدند. با در نظر گرفتن یک معادله حالت خطی بین مؤلفه‌های فشار شعاعی و عرضی در تانسور انرژی-تکانه، تابع شکل کرمچاله و تابع سرخ‌گرایی گرانشی فضا محاسبه شدند. ارضای شرط بازشدگی در گلوگاه کرمچاله، ایجاب می‌کند که پارامتر معادله حالت α همواره مقادیر منفی را اخذ کند، از این رو جواب‌های کرمچاله مجانباً تخت هستند. تابع سرخ‌گرایی گرانشی در سراسر فضا زمان متناهی است، از این رو کرمچاله فاقد افق رویداد و در نتیجه قابل عبور است. برای این دسته از جواب‌های کرمچاله‌ای مجانباً تخت، می‌توان با انتخاب مقادیر مثبت مناسب برای پارامتر λ و به‌ازای $\alpha < 0$ ، شرایط انرژی ضعیف و به تبع آن شرایط انرژی تهی را در نزدیکی گلوگاه کرمچاله محقق کرد. اما شرایط انرژی ضعیف به‌ازای مقادیر منفی λ در گلوگاه کرمچاله نقض می‌شوند.

به‌علاوه با استفاده از فرمول‌بندی لاگرانژی، پتانسیل مؤثر در فضای اطراف جواب‌های کرمچاله‌ای محاسبه شد و سپس با کمک آن رفتار ژئودزی‌های زمان‌گونه و نورگونه در اطراف کرمچاله مورد بررسی قرار گرفت. اگرچه پتانسیل مؤثر به‌صورت تابع صریحی از فاصله شعاعی و تکانه زاویه‌ای به‌دست می‌آید، اما رفتار ذره در اطراف کرمچاله، به‌انرژی ذره نیز بستگی دارد. با محاسبه نمودارهای پتانسیل مؤثر برای جواب‌های کرمچاله‌ای، رفتار ژئودزیک‌ها در اطراف کرمچاله مورد بحث قرار گرفت. برای $E^2 > V_{eff}(L, l_{max})$ ذره می‌تواند از گلوگاه کرمچاله عبور کرده و به‌جهانی دیگر وارد شود. اما اگر $E^2 < V_{eff}(L, l_{max})$ آنگاه بسته به‌فاصله ابتدایی ذره، دو رفتار متفاوت از خود نشان

است. همچنین از نمودار برداشت می‌شود که هرچه r_c به‌سمت بینهایت میل کند، زاویه انحراف به‌یک مقدار متناهی نزدیک می‌شود. به‌عبارت دیگر هرچه فاصله از گلوگاه کرمچاله بیشتر باشد آن‌گاه میدان گرانشی ضعیف‌تر خواهد بود و در نتیجه زاویه انحراف پرتو نور کمتر خواهد بود.

در مقاله [۲۲] با محاسبه مفصل و کامل ژئودزی‌های نورگونه اطراف کرمچاله‌هایی با ثابت انحنای ریچی صفر، درباره مقادیر منفی زاویه انحراف بحث نموده است. در این مقاله نشان داده شده است که زاویه انحراف اطراف کرمچاله‌هایی که در شرایط انرژی را در تمام فضا ارضاء می‌کنند همواره مثبت است. در حالی‌که وابسته به پارامتر برخورد زاویه انحراف در شرایط نقض انرژی ضعیف می‌تواند مثبت، منفی و صفر شوند. زاویه انحراف منفی برای ژئودزی‌های نورگونه به‌علت اثر پادگرانش کرمچاله اتفاق می‌افتد که در این شرایط پرتوهای نور از کرمچاله دور می‌شوند. برای مقادیر خاصی از پارامترهای برخورد، مجموع خالص زاویه انحراف می‌تواند صفر شود.



شکل ۵. نمودار زاویه انحراف برحسب r_c به‌ازای $\alpha = 0.6$ (زرد)، $\alpha = 0.5$ (سبز)، $\alpha = -0.4$ (سبز)، $\alpha = -0.35$ (آبی)، شعاع گلوگاه $r_0 = 1$

کرم‌چاله شده است. وجود این کمینه در گلوگاه حضور مدارهای دایره‌ای پایدار را تضمین می‌کند. در پایان به این نکته اشاره می‌کنیم که پایداری یا ناپایداری اجرام آسمانی یک موضوع حائز اهمیت در فیزیک گرانش است. این موضوع که ساختار یک کرمچاله قابل عبور در برابر اختلالات، پایدار باشد از این لحاظ فیزیکی حائز اهمیت است. از این رو، پایداری کرمچاله‌های استاتیکی با استفاده از یک معادله حالت خاص یا با در نظر گرفتن اختلالات شعاعی خطی در اطراف این کرمچاله‌ها بررسی شده است. در این راستا، به‌طور ویژه پایداری کرمچاله‌های پوسته نازکی که از فضا زمان شوارتزشیلد ساخته شده‌اند، مورد توجه قرار گرفته است. پایداری کرمچاله‌های پوسته نازک در نظریه انیشتین-ماکسول با ترم گاوس بنه در مرجع [۱۵] بررسی شده است. همچنین پایداری و ناپایداری کرمچاله‌های پوسته نازک استاتیکی و متقارن کروی که توسط گاز چپلین تعمیم یافته حمایت می‌شوند، در مرجع [۱۶] بررسی شده است.

مرجع‌ها

- [1] C.W. Misner, J.A. Wheeler, Classical physics as geometry, *Annals of physics*, 2 (1957) 525-603. [https://doi.org/0003-4916\(57\)90049-0](https://doi.org/0003-4916(57)90049-0)
- [2] F. d'Ovidio, E. Mosekilde, Dynamical system approach to phyllotaxis, *Physical Review E*, 61 (2000) 354. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.61.354>
- [3] S.D. Forghani, S.H. Mazharimousavi, Thin-shell wormholes with ordinary matter in pure Gauss-Bonnet gravity, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2020 (2020) 018. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2002.08358>

می‌دهد. به این صورت که اگر فاصله شعاعی ذره از فاصله شعاعی بیشینه پتانسیل مؤثر بیشتر باشد، آنگاه ذره از گلوگاه عبور نمی‌کند و در همان جهان اولیه باقی می‌ماند. ولی اگر فاصله شعاعی ذره از فاصله شعاعی بیشینه پتانسیل مؤثر کمتر باشد، آنگاه ذره به‌طور مداوم در گلوگاه کرمچاله حرکت رفت و برگشتی انجام می‌دهد. همچنین اگر انرژی ذره با پتانسیل مؤثر آن در گلوگاه برابر باشد، آنگاه ذره در یک مدار پایدار (ناپایدار) حرکت می‌کند. مطالعه ژئودزیک کرمچاله‌ها از این جهت حائز اهمیت است که بررسی و مشاهده رفتار ذرات در اطراف کرمچاله‌ها، امکان کشف آنها را در طبیعت فراهم می‌کند. به این ترتیب دانشمندان با انگیزه کشف کرمچاله‌ها، در زمینه نظریه‌های گرانشی اصلاح شده به تحقیق وجود آنها می‌پردازند. در این راستا پرداختن به موضوعاتی همچون اثرات گرانشی، میکرولنزینگ‌ها و غیره می‌تواند به کشف کرمچاله‌های موجود در جهان منجر شود [۲۳].

در مقاله [۱۵]، ما جواب‌های کرمچاله‌ای قابل عبور این مدل را با اعمال تابع سرخ‌گرایی صفر محاسبه نمودیم و در این مقاله نشان داده‌ایم که همواره در گلوگاه کرمچاله یک بیشینه وجود دارد بنابراین مدارهای دایره‌ای در گلوگاه کاملاً ناپایدار هستند. در کار حاضر به دنبال بررسی آثار حضور تابع سرخ‌گرایی غیرصفر هستیم. با اعمال این شرط، نمودار پتانسیل مؤثر با مورد تابع سرخ‌گرایی صفر متفاوت به دست آمد. ارضای شرایط انرژی در محل گلوگاه کرمچاله با انتخاب ثابت‌های مناسب در این مدل وجود دارد. همچنین در محاسبه تابع پتانسیل حول گلوگاه از بسط تیلور پتانسیل مؤثر در گلوگاه استفاده شده است و در نمودارها نشان داده شده است که حضور تابع سرخ‌گرایی غیر صفر باعث ایجاد کمینه در گلوگاه

- Physics, 19 (2022) 2250074.
<https://doi.org/10.1142/S19887822500748>
- [13] P. Bueno, P.A. Cano, Einsteinian cubic gravity, *Physical Review D*, 94 (2016) 104005.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.1607.06463>
- [14] P. Bueno, P.A. Cano, Four-dimensional black holes in Einsteinian cubic gravity, *Physical Review D*, 94 (2016) 124051.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.1610.08019>
- [15] M.R. Mehdizadeh, A.H. Ziaie, Traversable wormholes in Einsteinian cubic gravity, *Modern Physics Letters A*, 35 (2020) 2050017.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.1903.10907>
- [16] M.S. Morris, K.S. Thorne, Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity, *American Journal of Physics*, 56 (1988) 395-412. <https://doi.org/10.1119/1.15620>
- [17] P. Pavlovic, M. Sossich, Wormholes in viable $f(R)$ modified theories of gravity and weak energy condition, *The European Physical Journal C*, 75 (2015) 117.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.1406.2509>
- [18] P. Taylor, Propagation of test particles and scalar fields on a class of wormhole space-times, *Physical Review D*, 90 (2014) 024057.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.90.024057>
- [19] M.R. Mehdizadeh, A.H. Ziaie, Charged wormhole solutions in Einstein-Cartan gravity, *Physical Review D*, 99 (2019) 064033.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.1811.03364>
- [20] M. Thibeault, C. Simeone, E.F. Eiroa, Thin-shell wormholes in Einstein-Maxwell theory with a Gauss-Bonnet term, *General Relativity and Gravitation*, 38 (2006) 1593-1608.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.grqc/0512029>
- [21] E.F. Eiroa, Thin-shell wormholes with a generalized Chaplygin gas, *Physical*
- [4] M.R. Mehdizadeh, M.K. Zangeneh, F.S. Lobo, Einstein-Gauss-Bonnet traversable wormholes satisfying the weak energy condition, *Physical Review D*, 91 (2015) 084004.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.1501.04773>
- [5] A. Agnese, M. La Camera, Gravitation without black holes, *Physical Review D*, 31 (1985) 1280.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.31.1280>
- [6] F.S. Lobo, M.A. Oliveira, Wormhole geometries in $f(R)$ modified theories of gravity, *Physical Review D*, 80 (2009) 104012.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.0909.5539>
- [7] J.Y. Kim, M.-I. Park, On a new approach for constructing wormholes in Einstein-Born-Infeld gravity, *The European Physical Journal C*, 76 (2016) 1-11.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.1608.00445>
- [8] M. Mehdizadeh, N. Riazi, Cosmological wormholes in Lovelock gravity, *Physical Review D*, 85 (2012) 1240220.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2111.14828>
- [9] B. Zwiebach, Curvature squared terms and string theories, *Physics Letters B*, 156 (1985) 315-317.
[https://doi.org/10.1016/0370-\(85\)91616-8](https://doi.org/10.1016/0370-(85)91616-8)
- [10] R.C. Myers, M.F. Paulos, A. Sinha, Holographic studies of quasi-topological gravity, *Journal of High Energy Physics*, 2010 (2010) 1-44.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.1004.2055>
- [11] G. Mustafa, T.-C. Xia, I. Hussain, M.F. Shamir, Spherically symmetric static wormhole models in the Einsteinian cubic gravity, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 17 (2020) 2050214.
<https://doi.org/10.1142/S02182050214X>
- [12] I. Hussain, G. Mustafa, Traversable wormholes in Einsteinian-cubic-gravity with hybrid shape functions, *International Journal of Geometric Methods in Modern*

[23] F. Rahaman, K.N. Singh, R. Shaikh, T. Manna, S. Aktar, Shadows of Lorentzian traversable wormholes, *Classical and Quantum Gravity*, 38 (2021) 215007. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2108.09930>

Review D, 80 (2009) 044033. <https://doi.org/10.48550/arXiv.0907.2205>

[22] R. Shaikh, S. Kar, Gravitational lensing by scalar-tensor wormholes and the energy conditions, *Physical Review D*, 96 (2017) 044037. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1705.11008>