

Time Independent Drift Coefficients for Shaping Invariant Potentials

Taha Koohrokhi*, Abdolmajid Izadpanah, Atefeh Shadmehr

Department of Physics, Faculty of Sciences, Golestan University, Gorgan, Iran

Received: 28.03.2023 Final revised: 27.01.2024 Accepted: 29.01.2024

Doi: [10.22055/jrmbms.2024.18896](https://doi.org/10.22055/jrmbms.2024.18896)

Abstract

In this research, the time-independent drift coefficients for the shape-invariant potentials were obtained using the analytical solution of the Fokker-Planck equation. In this approach, first, the Fokker-Planck equation is converted into a Schrödinger-like equation. Then, using the mechanism of supersymmetric quantum mechanics, the Fokker-Planck equation is analytically solved and its explicit solutions are obtained. In this calculation, the diffusion coefficient is considered a constant. This approach applies to shape-invariant potentials which are exactly solvable potentials. Exactly solvable potentials refer to potentials for which all eigenvalues and eigenfunctions can be obtained explicitly. These calculations are used to examine the probability density distribution of laser-accelerated carbon beams after entering the fuel region in the fast ignition method.

Keywords: Fokker-Planck Equation, Drift Coefficient, Diffusion Coefficient, Supersymmetric Quantum Mechanics, Superpotential

* Corresponding Author: t.koohrokhi@gu.ac.ir

ضرایب سوق مستقل از زمان برای پتانسیل‌های شکل‌ناوردا

طه کوهرخی*، عبدالمجید ایزدپناه، عاطفه شادمهر

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه گلستان، گرگان، ایران

دریافت: ۱۴۰۲/۰۱/۰۸ ویرایش نهائی: ۱۴۰۲/۱۱/۰۷ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۱/۰۹

Doi: [10.22055/jrmbms.2024.18896](https://doi.org/10.22055/jrmbms.2024.18896)

چکیده

در این تحقیق، با استفاده از حل تحلیلی معادله فوکر-پلانک، ضرایب سوق مستقل از زمان برای پتانسیل‌های شکل‌ناوردا به دست آمده‌اند. در این رهیافت، ابتدا معادله فوکر-پلانک به یک معادله شرودینگرگونه تبدیل می‌شود. سپس، با استفاده از سازوکار مکانیک کوآنتومی ابرتقارنی، معادله فوکر-پلانک به‌طور تحلیلی حل شده و جواب‌های صریح آن به دست می‌آیند. در این محاسبه، ضریب پخش، به صورت یک ثابت در نظر گرفته شده است. این رهیافت برای پتانسیل‌های شکل‌ناوردا که پتانسیل‌های دقیقاً قابل حل هستند، کاربرد دارد. پتانسیل‌های دقیقاً قابل حل، به پتانسیل‌هایی اطلاق می‌شود که همه ویژه‌مقادیر و ویژه‌توابع مربوطه را می‌توان برای آنها صریحاً به دست آورد. بررسی توزیع چگالی احتمال باریکه کربنی شتاب‌گرفته از لیزر را در روش اشتعال سریع، بعد از ورود به ناحیه سوخت، به عنوان یک کاربرد از این محاسبات ارائه شده است.

کلیدواژگان: معادله فوکر-پلانک، ضریب سوق، ضریب پخش، مکانیک کوآنتومی ابرتقارنی، ابرپتانسیل

مقدمه

روش‌های مختلفی برای به دست آوردن جواب‌های دقیق یا تقریبی این معادله توسعه یافته‌اند [۷،۸]. یکی از روش‌های دست‌یابی به جواب‌های تحلیلی دقیق معادله FP، تبدیل آن به یک معادله شرودینگرگونه، و سپس حل یک مسئله ویژه‌مقداری است. این روش، هنگامی مفید است که معادله شرودینگر مربوطه، مانند چاه مربعی نامتناهی و نوسانگر هماهنگ، دقیقاً قابل حل باشد [۹].

از زمان پیدایش مکانیک کوآنتومی تاکنون، به دست آوردن جواب‌های دقیق بسیار مورد توجه بوده است.

معادله فوکر-پلانک^۱ (FP) یکی از معادلات اساسی است که برای مطالعه تأثیر نوسانات در انواع مختلف سامانه‌ها استفاده می‌شود [۱،۲]. این معادله، در زمینه‌های مختلفی مانند فیزیک، اخترفیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، اقتصاد، پیش‌بینی و غیره کاربرد پیدا کرده است [۳-۶]. جواب‌های معادله FP توزیع‌های چگالی احتمال وابسته به زمان را برای یافتن یک ذره، در یک موقعیت و سرعت معین به دست می‌دهند. به دلیل کاربرد گسترده معادله FP، در چند دهه اخیر،

* نویسنده مسئول: t.koohrokhi@gu.ac.ir

¹ Fokker-Planck



برای محاسبه ضرایب سوق مستقل از زمان، به ازای ضریب پخش ثابت و برای پتانسیل‌های شکل‌ناوردا به خدمت گرفته شده است.

سوق و پخش در معادله FP

معادله FP تحولات زمانی تابع توزیع یا تابع توزیع احتمال^۵ $P(\mathbf{v}, t)$ (PDF) ذراتی را توصیف می‌کند که برخوردهای تصادفی انجام می‌دهند. به عنوان نمونه، فرض کنید باریکه‌ای از ذرات تک‌انرژی، وارد یک پلاسما می‌شود. ذرات تشکیل‌دهنده باریکه (پرتابه) با ذرات پس‌زمینه پلاسما (هدف) برخورد می‌کنند. در اثر وقوع این برخوردها، مهمترین رخدادها عبارت‌اند از: (۱) کاهش سرعت پرتابه به دلیل از دست دادن تکانه در راستای باریکه و (۲) پخش شدن سرعت پرتابه و انحراف از راستای اولیه باریکه. در معادله FP اولین جمله مربوط به رخداد ۱ و دومین جمله مربوط به رخداد ۲ است [۲]:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{v}, t) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left(\langle \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \rangle P(\mathbf{v}, t) \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} : \left(\langle \frac{\Delta \mathbf{v} \Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \rangle P(\mathbf{v}, t) \right) \quad ۱$$

به طور کلی، PDF می‌تواند وابسته به N متغیر باشد که در این صورت، جمله اول این رابطه را بردار سوق^۶ یا اصطکاک، و جمله دوم را تانسور پخش^۷ می‌گویند. با وجود اینکه معادله FP یکی از ساده‌ترین معادلات برای متغیرهای ماکروسکوپی پیوسته است، اما جمله‌های سوق و پخش از فرآیندهای میکروسکوپی به دست آمده و محاسبات پیچیده‌ای دارند. با این حال، با مفروضاتی می‌توان این جمله‌ها را برای محاسبه، ساده‌تر کرد.

چراکه این جواب‌ها و روش‌های دست‌یابی به آنها، به درک بهتر، طبقه‌بندی، تعمیم و استفاده از سامانه‌های کوآنتومی و همچنین بررسی اعتبار برخی از روش‌های تقریبی کمک می‌کنند. پتانسیل‌های دقیقاً قابل حل، به پتانسیل‌هایی اطلاق می‌شود که همه ویژه‌مقادیر متناهی یا نامتناهی و ویژه‌توابع مربوطه را می‌توان برای آنها صریحاً به دست آورد [۱۰]. تلاش برای جستجوی پتانسیل‌های دقیقاً قابل حل در مکانیک کوآنتومی، آنها را به گروه‌های مختلفی، از جمله، قابل حل [۱۱]، مشروط دقیق [۱۲]، شبه‌دقیق [۱۳] و نزدیک به دقیق [۱۴] یا نیمه‌دقیق [۱۵] طبقه‌بندی کرده است.

در ارتباط با روش‌های تحلیلی، مکانیک کوآنتومی ابرتقارنی^۱ (SUSY-QM)، با استفاده از عملگرهای نردبانی و سلسله‌مراتب هامیلتونی‌ها، سازوکاری را ارائه می‌دهد که با استفاده از آن می‌توان نشان داد که معادله شرودینگر تنها برای پتانسیل‌های شکل‌ناوردا^۲ (SIP) دقیقاً قابل حل است [۱۶]. در جدول ۱، پتانسیل‌ها و ابرپتانسیل‌های شکل‌ناوردای متداول فهرست شده‌اند. طبق تعریف، SIPها، پتانسیل‌هایی هستند که تابعیت یکسانی به متغیرهای اصلی دارند و تنها از نظر مقدار پارامترها و ثوابت با یکدیگر متفاوت‌اند. بنابراین، اگر به نحوی بتوانیم معادله FP را به یک معادله شرودینگرگونه تبدیل کنیم، قادر خواهیم بود که با استفاده از سازوکار SUSY-QM، این معادله را به ازای پتانسیل‌های شکل‌ناوردا، به طور تحلیلی حل کرده و جواب‌های صریح و دقیق به دست آوریم. این رهیافت، رویکردی است که اخیراً، برای حل معادله FP به ازای پتانسیل‌های مورس تعمیم‌یافته^۳ و هالتن^۴ به کار گرفته شده است [۱۷]. در تحقیق حاضر، این رهیافت

⁵ Probability Distribution Function

⁶ Drift

⁷ Diffusion

¹ Supersymmetric Quantum Mechanics

² Shape Invariant Potentials

³ Generalized Morse

⁴ Hulthén

$$\frac{1}{\varphi_n(x)} \left\{ -\frac{d}{dx} [D^{(1)}(x)\varphi_n(x)] + \frac{d^2}{dx^2} [D^{(2)}(x)\varphi_n(x)] \right\} = -\lambda_n \quad ۶$$

با حل معادله ۵، قسمت زمانی PDF، متناسب می‌شود با:

$$T_n(t) \propto e^{-t\lambda_n} \quad ۷$$

PDF در رابطه ۴، با فرض زیر:

$$\varphi_n(x) = \psi_0(x)\psi_n(x) \quad ۸$$

به صورت رابطه زیر در می‌آید:

$$P(x, t) = \psi_0(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(x) e^{-t\lambda_n} \quad ۹$$

با استفاده از رابطه کامل بودن در مکانیک کوانتومی:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^*(x_0)\psi_n(x) = \delta(x - x_0) \quad ۱۰$$

و ویژگی PDF در زمان اولیه $t_0 = 0$ و رابطه ۹، داریم:

$$P(x, 0) = \psi_0(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(x) = \delta(x - x_0) \quad ۱۱$$

با برابر قراردادن روابط ۱۰ و ۱۱، به دست می‌آوریم:

$$P(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^*(x_0)\psi_n(x) \quad ۱۲$$

سپس، با ضرب دو طرف تساوی در $\frac{\psi_\ell^*(x)}{\psi_0(x)}$ و بعد انتگرال گرفتن روی x :

$$\int \frac{\psi_\ell^*(x)}{\psi_0(x)} P(x, 0) dx =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int \psi_0(x) \frac{\psi_\ell^*(x)}{\psi_0(x)} \psi_n(x) dx =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int \underbrace{\psi_\ell^*(x)\psi_n(x)}_{\delta_{\ell n}} dx = a_\ell = a_n \quad ۱۳$$

به عنوان مثال، اگر سامانه مورد بررسی را یک سامانه همگن و تقریباً در تعادل حرارتی، و همچنین برخوردارها را همسانگرد فرض کنیم، جمله پخش را می‌توانیم مستقل از زمان و ثابت در نظر بگیریم. در قسمت بعدی، معادله FP را برای چنین سامانه‌ای، ساده‌سازی کرده و به حل تحلیلی آن می‌پردازیم.

جداسازی قسمت‌های زمانی و وابسته به x معادله FP

اگر برای ساده‌سازی، به جای \mathbf{v} ، x را جایگزین کنیم، معادله FP (رابطه ۱)، را در یک بعد می‌توان به صورت زیر نوشت [۲]:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = L_{FP} P(x, t) \quad ۲$$

که در آن L_{FP} عملگر FP است:

$$L_{FP} = -\frac{\partial}{\partial x} D^{(1)}(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(2)}(x) \quad ۳$$

مطابق به توضیحات بخش گذشته، $D^{(1)}(x)$ و $D^{(2)}(x)$ به ترتیب ضرایب سوق و پخش مستقل از زمان هستند.

اکنون فرض می‌کنیم که بخش‌های وابسته به t و x تابع توزیع احتمال را بتوان از هم جدا کرد و آن را به صورت زیر نوشت:

$$P(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) T_n(t) \quad ۴$$

با جای‌گذاری رابطه ۴ در رابطه ۲، قسمت زمانی و وابسته به x به ترتیب به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\frac{1}{T_n(t)} \frac{d}{dt} T_n(t) = -\lambda_n \quad ۵$$

است. دلیل انتخاب روابط ۱۹ و ۲۰ به این صورت، تبدیل رابطه ۱۸ به یک معادله شرودینگرگونه و حل تحلیلی معادله FP با استفاده از سازوکار SUSY-QM است که در بخش بعد به آن می‌پردازیم. طبق رابطه ۸، برای $\varphi_n(x)$ داریم:

$$\varphi_n(x) = N \exp\left(-\frac{f(x)}{2D}\right) \psi_n(x) \quad 21$$

که در آن، تابع $f(x)$ ، مطابق رابطه ۱۷ برابر می‌شود با:

$$f(x) = -\int D^{(1)}(x) dx \quad 22$$

اکنون با قراردادن رابطه ۲۱ در رابطه ۱۸، به یک معادله شرودینگرگونه می‌رسیم:

$$-\psi_n''(x) + V(x)\psi_n(x) = E_n\psi_n(x) \quad 23$$

که در آن:

$$E_n = \frac{\lambda_n}{D} \quad 25$$

و:

$$V(x) = \left[\frac{f'(x)}{2D}\right]^2 - \frac{f''(x)}{2D} \quad 26$$

است.

حل تحلیلی معادله FP با استفاده از SUSY-QM

در SUSY-QM با تعریف n -امین ابرپتانسیل، به صورت منفی مشتق لگاریتمی تابع موج حالت پایه n -ام [۱۸، ۱۹]:

$$W_n(x) = -\frac{\psi_0^{(n)'(x)}}{\psi_0^{(n)}(x)} = -\frac{d}{dx} \ln[\psi_0^{(n)}(x)] \quad 27$$

و سلسه مراتب هامیلتونی‌ها، سازوکاری معرفی می‌شود که طبق آن می‌توان بیناب انرژی پتانسیل‌های

ضریب a_n به صورت زیر به دست می‌آید:

$$a_n = \frac{\psi_n^*(x_0)}{\psi_0(x_0)} \quad 14$$

که در آن، اگر عملگر FP هرمیتی باشد، داریم:

$$\psi_n^*(x_0) = \psi_n(x_0) \quad 15$$

این شرط، در واقع شرط لازم برای حقیقی شدن ضرایب a_n و در نتیجه تابع توزیع احتمال $P(x, t)$ در رابطه ۹ است.

تبدیل بخش وابسته به x معادله FP به یک معادله شرودینگرگونه

با ثابت در نظر گرفتن ضریب بخش به صورت زیر:

$$D^{(2)}(x) = D \quad 16$$

و ضریب سوق مستقل از زمان با رابطه زیر:

$$D^{(1)}(x) = -f'(x) \quad 17$$

و جای‌گذاری این روابط در رابطه ۶، بخش وابسته به x معادله FP به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{1}{\varphi_n(x)} \left\{ \frac{d}{dx} \left(\frac{f'(x)}{D} \varphi_n(x) \right) + \frac{d^2}{dx^2} \varphi_n(x) \right\} = -\frac{\lambda_n}{D} \quad 18$$

$\psi_0(x)$ را به صورت یک تابع نمایی در نظر می‌گیریم:

$$\psi_0(x) = N \exp\left(-\frac{\Phi(x)}{2}\right) \quad 19$$

که در آن:

$$\Phi(x) = \frac{f(x)}{D} \quad 20$$

دو بعدی برای IFI، نشان می‌دهند که برای اشتعال یک سوخت پیش‌فشرده دوتریوم^۴-تریتموم^۵ (DT) با چگالی $\rho = 500 \text{ gcm}^{-3}$ به باریکه‌ای یونی با چگالی توان 10^{22} Wcm^{-3} انرژی کل $E_{\text{کل}} = 10 \text{ kJ}$ ، پهنای تپ $\tau = 20 \text{ ps}$ و قطر $30 \mu\text{m}$ نیاز داریم [۲۲].

اکنون، فرض می‌کنیم که باریکه یونی در زمان اولیه $t = 0$ و در فاصله d از قرص سوخت، با توزیع انرژی ماکسول تولید شود [۲۳]:

$$f_I(E_I) = \frac{2N_0}{\sqrt{\pi T_I^{3/2}}} \sqrt{E_I} \exp\left(-\frac{E_I}{T_I}\right) \quad ۳۲$$

که در آن N_0 تعداد کل یون‌ها و T_I دمای یون برحسب واحد مگا‌اکتروولت (MeV) است. هر یون با انرژی جنبشی $E_I = \left(\frac{1}{2}\right) m_I v_I^2$ مسافت d را از محل تولید تا سطح سوخت در زمان t طی می‌کند. بنابراین، آهنگ رسیدن انرژی به سطح سوخت، برای باریکه‌ای که انرژی هر یون آن برابر با $E_I(t) = \left(\frac{1}{2}\right) m_I \left(\frac{d}{t}\right)^2$ است، با رابطه زیر به دست می‌آید:

$$P_I(t) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \frac{E_{\text{کل}}}{\tau} \left(\frac{\tau}{t}\right)^6 \times \exp\left[-\left(\frac{\tau}{t}\right)^2\right] \quad ۳۳$$

که در آن $\tau = \left(\frac{m_I d^2}{2T_I}\right)^{\frac{1}{2}}$ ps زمان مشخصه است، m_I جرم یون و $N_0 T_I = \left(\frac{3}{2}\right) E_{\text{کل}}$ انرژی کل باریکه است. یک باریکه کربنی را با این مشخصات برای ایجاد یک لکه داغ در نظر بگیرید [۲۳]. در اثر پراکندگی‌هایی که این باریکه با ذرات هدف انجام می‌دهد، در سوخت متوقف شده و با تزریق انرژی خود در ناحیه سوخت،

شکل‌ناوردا را به‌طور صریح به دست آورد. بنابراین، بر طبق رابطه ۲۷، تابع موج حالت پایه اول $\psi_0^{(1)}(x)$ برابر می‌شود با [۲۰]:

$$\psi_0^{(1)}(x) = N \exp(-\int W_1(x) dx) \quad ۲۸$$

با مقایسه این رابطه با روابط ۱۹ و ۲۰، به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$W_1(x) = \frac{f'(x)}{2D} \quad ۲۹$$

سرانجام، ضریب سوق مستقل از زمان، با استفاده از این رابطه و رابطه ۱۷، با رابطه زیر به ضریب پخش و ابرپتانسیل مرتبط می‌شود:

$$D^{(1)}(x) = -2DW_1(x) \quad ۳۰$$

از آنجا که شرط لازم برای SUSY نشکسته، صفر بودن انرژی حالت پایه هامیلتونی اول است $E_0^{(1)} = 0$ ، در نتیجه، طبق رابطه ۲۵ داریم:

$$\lambda_0^{(1)} = 0 \quad \text{و} \quad \lambda_{n+1}^{(1)} > \lambda_n^{(1)} \quad ۳۱$$

کاربرد: اشتعال سریع یونی در همجوشی توسط محصورسازی اینرسی

همراه با توسعه لیزرهای پرشدت و دستیابی به باریکه‌های یونی شتاب‌گرفته از لیزر، طرح اشتعال سریع یونی^۱ (IFI) به‌عنوان جایگزینی برای روش سنتی همجوشی توسط محصور اینرسی^۲ (ICF) پیشنهاد شده است [۲۱]. تمرکز تزریق انرژی در ناحیه اشتعال به نام لکه داغ^۳، یکی از مزیت‌های این روش نسبت به روش‌های دیگر است. شبیه‌سازی‌های هیدرودینامیکی

⁴ Deuterium

⁵ Tritium

¹ Ion Fast Ignition

² Inertial Confinement Fusion

³ Hot Spot

شکل‌ناوردایی^۱ پیروی می‌کنند. شرط شکل‌ناوردایی بیان می‌کند که:

$$V_{n+1}(x, a_n) + g(a_n) \\ = V_n(x, a_{n+1}) + g(a_{n+1}) \quad ۳۴$$

که در آن a_{n+1} تابعی از a_n و $g(a_i)$ یک ثابت است. دو پتانسیل جفت شکل‌ناوردا $V_{n+1}(x, a_n)$ و $V_n(x, a_{n+1})$ بستگی به یکسانی دارند، اما در مقدار پارامترهای a_i با یکدیگر متفاوت‌اند. در SUSY-QM، پتانسیل‌های جفت ابرتقارنی، با استفاده از رابطه زیر، از یک ابرپتانسیل به دست می‌آیند [۱۶]:

$$\begin{cases} V_n(x) = W_n^2(x) - W_n'(x) + E_0^{(n)} \\ V_{n+1}(x) = W_n^2(x) + W_n'(x) + E_0^{(n)} \end{cases} \quad ۳۵$$

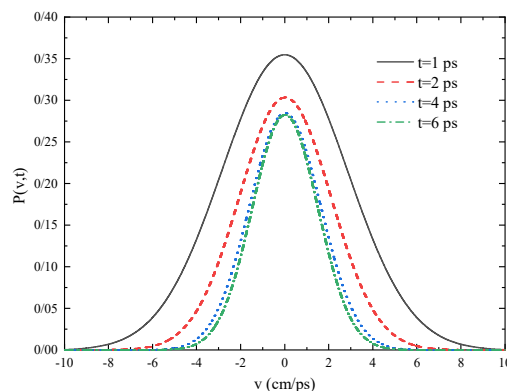
با استفاده از رابطه ۳۵، شرط شکل‌ناوردایی ۳۴ برحسب ابرپتانسیل‌ها، به صورت زیر می‌شود:

$$W^2(x, a_n) + W_n'(x, a_n) + g(a_n) \\ = W^2(x, a_{n+1}) - W_n'(x, a_{n+1}) \\ - g(a_{n+1}) \quad ۳۶$$

این رابطه برای تعریف شکل‌ناوردایی، یک معادله دیفرانسیل تفاضلی است و می‌تواند در به دست آوردن خانواده‌ای از ابرپتانسیل‌های شکل‌ناوردا، که به ابرپتانسیل‌های متداول معروفند، مؤثر باشد. ابرپتانسیل‌های متداول، ابرپتانسیل‌هایی هستند که صریحاً به \hbar وابسته نیستند و یک خانواده کامل را تشکیل می‌دهند (جدول ۱) [۱۶]. ثابت شده است که معادله شرودینگر برای این خانواده، دقیقاً قابل حل

انرژی مورد نیاز برای اشتعال آن را فراهم می‌کند. یکی از روش‌های محاسبه چگونگی این تزریق انرژی و پخش ذرات پرتابه در هدف، استفاده از نظریه جنبشی و حل معادله FP است [۲۴-۲۶].

اکنون از حل تحلیلی معادله FP که در بخش‌های قبلی معرفی شد، برای به دست آوردن تحول زمانی تابع توزیع ذرات پرتابه در اثر برخوردها در هدف، استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم که پراکندگی‌های پرتابه در هنگام ورود به ناحیه قرص سوخت، تحت تأثیر پتانسیل نوسانگر هماهنگ انجام شود (اولین پتانسیل در جدول ۲ به‌ازای مقادیر نوعی $b = 0$ ، $\omega = 0.5$ و $D = 1$). با استفاده از رابطه ۸ و با جای‌گذاری سرعت v به جای متغیر x ، می‌توانیم توزیع ذرات پرتابه را در زمان‌های بعدی به دست آوریم. شکل ۱ نمونه‌ای از این محاسبه را به‌ازای چهار زمان مختلف نشان می‌دهد.



شکل ۱. توزیع پرتابه کربنی بعد از ورود به ناحیه سوخت در زمان‌های مختلف.

نتیجه‌گیری

نوع مشخصی از ابرپتانسیل‌ها وجود دارند که پتانسیل‌های جفت حاصل از آن‌ها، از قید خاصی به نام

^۱ Shape Invariance

است [۲۷]. در جدول ۲، ویژه‌توابع $\psi_n^{(1)}(x)$ و زمان $D^{(1)}(x)$ را برای پتانسیل‌های شکل‌ناوردای $\psi_0^{(1)}(x)$ ، ویژه‌مقادیر $\lambda_n^{(1)}$ و ضرایب سوق مستقل از متداول، محاسبه و فهرست کرده‌ایم.

جدول ۱. پتانسیل‌ها و ابرپتانسیل‌های شکل‌ناوردای متداول x و r متغیرهای اصلی و بقیه ثوابت، پارامترهای این پتانسیل‌ها هستند [۱۶].

نام پتانسیل	ابرپتانسیل $W(x)$	پتانسیل $V_1(x; \mathbf{a}_1)$
نوسانگر جابه‌جا شده	$\frac{1}{2}\omega x - b$	$\frac{1}{4}\omega^2 \left(x - \frac{2b}{\omega}\right)^2 - \omega/2$
نوسانگر هماهنگ سه‌بعدی	$\frac{1}{2}\omega r - \frac{(\ell+1)}{r}$	$\frac{1}{4}\omega^2 r^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - (\ell+3/2)\omega$
کولبی	$\frac{e^2}{2(\ell+1)} - \frac{(\ell+1)}{r}$	$-\frac{e^2}{r} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{e^4}{4(\ell+1)^2}$
مورس	$A - B \exp(-\alpha x)$	$A^2 + B^2 \exp(-2\alpha x) - 2B(A + \alpha/2) \times \exp(-\alpha x)$
اسکارف ^۲ (هذلولوی)	$A \tanh \alpha x + B \operatorname{sech} \alpha x$	$A^2 + (B^2 - A^2 - A\alpha) \operatorname{sech}^2(\alpha x) + B(2A + \alpha) \operatorname{sech} \alpha x \tanh \alpha x$
روزن-مورس ^۲ (هذلولوی)	$A \tanh \alpha x + B/A$ ($B < A^2$)	$A^2 + B^2/A^2 - A(A + \alpha) \operatorname{sech}^2(\alpha x) + 2B \tanh \alpha x$
اکارت ^۳	$-A \coth \alpha r + B/A$ ($B > A^2$)	$A^2 + B^2/A^2 + A(A - \alpha) \operatorname{csch}^2(\alpha r) - 2B \coth \alpha r$
اسکارف ^۱ (مثلثاتی)	$-A \tan \alpha x + B \sec \alpha x$ ($-\frac{1}{2}\pi \leq \alpha x \leq \frac{1}{2}\pi$)	$-A^2 + (A^2 + B^2 - A\alpha) \sec^2 \alpha x - B(2A - \alpha) \tan \alpha x \sec \alpha x$
پوشل-تلر ^۴ تعمیم یافته	$A \coth \alpha r - B \operatorname{csch} \alpha r$ ($A < B$)	$A^2 + (A^2 + B^2 + A\alpha) \operatorname{csch}^2 \alpha r - B(2A + \alpha) \coth \alpha r \operatorname{csch} \alpha r$
روزن-مورس ^۱ (مثلثاتی)	$-A \cot \alpha x - B/A$ ($0 \leq \alpha x \leq \pi$)	$A(A - \alpha) \csc^2 \alpha x + 2B \cot \alpha x - A^2 + B^2/A^2$

³ Eckart

⁴ Generalized Pöschl-Teller

¹ Scarf

² Rosen-Morse

جدول ۲. ویژه توابع $\psi_n^{(1)}(x)$ و $\psi_0^{(1)}(x)$ ، ویژه مقادیر $\lambda_n^{(1)}$ و ضرایب سوق مستقل از زمان $D^{(1)}(x)$ برای اپتانسیل‌های شکل‌ناوردای متداول جدول ۱.

نام اپتانسیل	ضریب مستقل از زمان سوق $D^{(1)}(x)$	$\psi_n^{(1)}(y)$	$\psi_0^{(1)}(y)$	متغیر y	$\lambda_n^{(1)}$
نوسانگر جابه‌جاشده	$-D\omega x + 2Db$	$\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) H_n(y)$	$\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$	$\left(\frac{\omega}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{2b}{\omega}\right)$	$Dn\omega$
نوسانگر هماهنگ سه‌بعدی	$\frac{-D\omega r}{r} + \frac{2D(\ell+1)}{r}$	$y^{\ell+1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}y\right) \ln^{\ell+1/2}(y)$	$y^{\ell+1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}y\right)$	$\frac{1}{2}\omega r^2$	$2Dn\omega$
کولبی	$\frac{-De^2}{r} + \frac{2D(\ell+1)}{r}$	$y^{\ell+1} \exp\left(-\frac{1}{2}y\right) \ln^{2\ell+1}(y)$	$y^{\ell+1} \exp\left(-\frac{1}{2}y\right)$	$\frac{re^2}{(n+\ell+1)}$	$\frac{De^4}{4} \left(\frac{1}{(\ell+1)^2} - \frac{1}{(n+\ell+1)^2} \right)$
مورس	$-2DA + \exp(-\alpha x) 2DB$	$y^{s-n} \exp\left(-\frac{1}{2}y\right) \ln^{2s-2n}(y)$	$y^s \exp\left(-\frac{1}{2}y\right)$	$\left(\frac{2B}{\alpha}\right) \exp(-\alpha x),$ $s = A/\alpha$	$\frac{DA^2}{-D(A-n\alpha)^2}$
اسکارف ۲ (هذلولوی)	$-2DA \tanh(\alpha x) - 2DB \operatorname{sech}(\alpha x)$	$i^n (1+y^2)^{-s/2} \times \exp(-\lambda \tan^{-1} y) \times P_n^{(i\lambda-s-1/2, -i\lambda-s-1/2)}(iy)$	$(1+y^2)^{-s/2} \times \exp(-\lambda \tan^{-1} y)$	$\sinh \alpha x,$ $s = A/\alpha,$ $\lambda = B/\alpha$	$DA^2 - D(A-n\alpha)^2$
روزن-مورس ۲ (هذلولوی)	$\frac{-2DA \tanh \alpha x}{2DB} - \frac{A}{(B < A^2)}$	$(1-y)^{(s-n+a)/2} (1+y)^{(s-n-a)/2} \times P_n^{(s-n+a, s-n-a)}(y)$	$(1-y)^{(s+a)/2} \times (1+y)^{(s-a)/2},$ $n = 0$	$\tanh \alpha x,$ $s = A/\alpha,$ $\lambda = B/\alpha^2,$ $a = \lambda/(s-n)$	$\frac{DA^2}{-D(A-n\alpha)^2} + D \frac{B^2}{A^2} - D \frac{B^2}{(A-n\alpha)^2}$
اکارت	$\frac{-2DA \coth(\alpha r)}{2DB} - \frac{A}{(B > A^2)}$	$(y-1)^{-(s+n-a)/2} (y+1)^{-(s+n+a)/2} \times P_n^{(-s-n+a, -s-n-a)}(y)$	$(y-1)^{-(s-a)/2} \times (y+1)^{-(s+a)/2},$ $n = 0$	$\coth \alpha r,$ $s = A/\alpha,$ $\lambda = B/\alpha^2,$ $a = \lambda/(n+s)$	$\frac{DA^2}{-D(A+n\alpha)^2} + \frac{DB^2}{A^2} - \frac{DB^2}{(A+n\alpha)^2}$
اسکارف ۱ (مثلثاتی)	$\frac{2DA \tan(\alpha x)}{-2DB \sec(\alpha x)} \left(\frac{\pi}{2} \leq \alpha x \leq \frac{\pi}{2} \right)$	$(1-y)^{(s-\lambda)/2} (1+y)^{(s+\lambda)/2} \times P_n^{(s-\lambda-1/2, s+\lambda-1/2)}(y)$	$(1-y)^{(s-\lambda)/2} \times (1+y)^{(s+\lambda)/2}$	$\sin \alpha x,$ $s = A/\alpha,$ $\lambda = B/\alpha$	$D(A+n\alpha)^2 - DA^2$
پوشل-تار تعمیم‌یافته	$\frac{-2DA \coth(\alpha r)}{2DB} + \frac{2DB \operatorname{csch}(\alpha r)}{A} (A < B)$	$(y-1)^{(\lambda-s)/2} (y+1)^{-(\lambda+s)/2} \times P_n^{(\lambda-s-1/2, -\lambda-s-1/2)}(y)$	$(y-1)^{(\lambda-s)/2} \times (y+1)^{-(\lambda+s)/2}$	$\cosh \alpha r,$ $s = A/\alpha,$ $\lambda = B/\alpha$	$DA^2 - D(A+n\alpha)^2$
روزن-مورس ۱ (مثلثاتی)	$\frac{2DA \coth(\alpha x)}{2DB} + \frac{A}{(0 \leq \alpha x \leq \pi)}$	$y^2 - 1)^{-(s+n)/2} \exp(aax) \times P_n^{(-s-n+ia, -s-n-ia)}(y)$	$(y^2 - 1)^{-s/2} \times \exp(aax),$ $n = 0$	$i \cot \alpha x,$ $s = A/\alpha,$ $\lambda = B/\alpha^2,$ $a = \lambda/(n+s)$	$\frac{D(A+n\alpha)^2}{-DA^2 + \frac{DB^2}{A^2}} - \frac{DB^2}{(A+n\alpha)^2}$

آنچه که در جدول ۲ برای اپتانسیل‌های متداول به‌دست آمده است را می‌توان به‌همه اپتانسیل‌های شکل‌ناوردا تعمیم داد.

توابع موج حالت‌های مقید اپتانسیل‌های متداول را می‌توان برحسب چند جمله‌ای‌های متعامد کلاسیک بیان کرد [۲۸]. با معرفی برخی بسط‌های گویای این اپتانسیل‌ها، مجموعه جدیدی از اپتانسیل‌های شکل‌ناوردا به‌دست آمده‌اند که صریحاً به \hbar وابسته هستند. توابع موج حالت‌های مقید اپتانسیل‌ها، چندجمله‌ای‌های متعامد استثنایی هستند [۲۹]. بنابراین،

(2015). <https://doi.org/10.1007/978-3-319-11770-6>

[9] M. Bernstein, L.S. Brown, Supersymmetry and the bistable Fokker-Planck equation, Physical review letters, 52 (1984) 1933. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.52.1933>

[10] R. Sasaki, Exactly solvable potentials with finitely many discrete eigenvalues of arbitrary choice, Journal of Mathematical Physics, 55 (2014) 0022-2488. <https://doi.org/10.1063/1.4880200>

[11] G. Lévai, O. Özer, An exactly solvable Schrödinger equation with finite positive position-dependent effective mass, Journal of Mathematical Physics, 51 (2010) 0022-2488. <https://doi.org/10.1063/1.3483716>

[12] D. Dutta, P. Roy, Conditionally exactly solvable potentials and exceptional orthogonal polynomials, Journal of Mathematical Physics, 51 (2010) 0022-2488. <https://doi.org/10.1063/1.3339676>

[13] F. Finkel, A. González-López, M.A. Rodríguez, Quasi-exactly solvable potentials on the line and orthogonal polynomials, Journal of Mathematical Physics, 37 (1996) 3954-3972. <https://doi.org/10.1063/1.531591>

[14] M. Znojil, Perturbation theory for quantum mechanics in its Hessenberg-matrix representation, International Journal of Modern Physics A, 12 (1997) 299-304. <https://doi.org/10.1142/S0217751X97000451>

[15] S. Dong, G.-H. Sun, B. Falaye, S.-H. Dong, Semi-exact solutions to position-dependent mass Schrödinger problem with a class of hyperbolic potential $V_0 \tanh(ax)$, The European Physical Journal Plus, 131 (2016) 176. <https://doi.org/10.1140/epjp/i2016-16176-5>

[16] F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme, Supersymmetry and quantum mechanics,

[1] H. Risken, Fokker-planck equation, Springer (1996). <https://doi.org/10.1007/978-3-642-61544-3>

[2] S.F. Kwok, Langevin and Fokker-Planck Equations and Their Generalizations: Descriptions and Solutions, World Scientific (2018). <https://doi.org/10.1142/9745>

[3] C. Curtiss, R. Byron Bird, Fokker-Planck equation for the one-molecule distribution function in polymer mixtures and its solution, The Journal of chemical physics, 106 (1997) 9899-9921. <https://doi.org/10.1063/1.473878>

[4] K. Lee, W. Sung, Ion transport and channel transition in biomembranes, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 315 (2002) 79-97. [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(02\)01247-5](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(02)01247-5)

[5] D. Brigo, F. Mercurio, Lognormal-mixture dynamics and calibration to market volatility smiles, International Journal of Theoretical and Applied Finance, 5 (2002) 427-446. <https://doi.org/10.1142/S0219024902001511>

[6] C. Montagnon, A closed solution to the Fokker-Planck equation applied to forecasting, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 420 (2015) 14-22. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2014.10.079>

[7] S.K. Banik, B.C. Bag, D.S. Ray, Generalized quantum Fokker-Planck, diffusion, and Smoluchowski equations with true probability distribution functions, Physical Review E, 65 (2002) 051106. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.65.051106>

[8] T. Tomé, M.J. De Oliveira, Stochastic dynamics and irreversibility, Springer

- [23] J. Honrubia, J. Fernández, M. Temporal, B. Hegelich, J. Meyer-ter-Vehn, Fast ignition of inertial fusion targets by laser-driven carbon beams, *Physics of Plasmas*, 16 (2009) 1070-1664X. <https://doi.org/10.1063/1.3234248>
- [24] C.-K. Li, R.D. Petrasso, Charged-particle stopping powers in inertial confinement fusion plasmas, *Physical review letters*, 70 (1993) 3059. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.70.3059>
- [25] M. Mahdavi, T. Koohrokhi, Energy deposition of multi-MeV protons in compressed targets of fast-ignition inertial confinement fusion, *Physical Review E*, 85 (2012) 016405. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.85.016405>
- [26] M. Mahdavi, T. Koohrokhi, R. Azadifar, The interaction of quasi-monoenergetic protons with pre-compressed inertial fusion fuels, *Physics of Plasmas*, 19 (2012) 1070-1664X. <https://doi.org/10.1063/1.4745862>
- [27] A. Gangopadhyaya, J.V. Mallow, C. Rasinariu, *Supersymmetric quantum mechanics: An introduction*, World Scientific Publishing Company 2017. <https://doi.org/10.1142/10475>.
- [28] A. Gangopadhyaya, J.V. Mallow, Generating shape invariant potentials, *International Journal of Modern Physics A*, 23 (2008) 4959-4978. <https://doi.org/10.1142/S0217751X08042894>.
- [29] D. Gómez-Ullate, N. Kamran, R. Milson, An extended class of orthogonal polynomials defined by a Sturm–Liouville problem, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 359 (2009) 352-367. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.05.052>
- Physics Reports*, 251 (1995) 267-385. [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(94\)00080-M](https://doi.org/10.1016/0370-1573(94)00080-M)
- [17] R. Anjos, G. Freitas, C. Coimbra-Araújo, Analytical solutions of the Fokker–Planck equation for generalized Morse and Hulthén potentials, *Journal of Statistical Physics*, 162 (2016) 387-396. <https://doi.org/10.1007/s10955-015-1414-7>
- [18] T. Koohrokhi, S. Kartal, A new effective potential for deuteron, *Communications in Theoretical Physics*, 74 (2022) 075301. <https://doi.org/10.1016/j.aop.2023.169490>.
- [19] T. Koohrokhi, S. Kartal, A. Mohammadi, Anti-PT transformations and complex non-Hermitian PT-symmetric superpartners, *Annals of Physics*, 459 (2023) 169490. <https://doi.org/10.1088/1572-9494/ac6fc3>.
- [20] T. Koohrokhi, A. Izadpanah, S.J. Hosseinikhah, Investigation of Singularity of Central Shape Invariant Potentials, *Journal of Research on Many-body Systems*, In Press. [10.22055/jrmbms.2024.18897](https://doi.org/10.22055/jrmbms.2024.18897)
- [21] J. Fernández, B. Albright, F.N. Beg, M.E. Foord, B.M. Hegelich, J. Honrubia, M. Roth, R.B. Stephens, L. Yin, Fast ignition with laser-driven proton and ion beams, *Nuclear fusion*, 54 (2014) 054006. <https://doi.org/10.1088/0029-5515/54/5/054006>
- [22] L. Robson, P. Simpson, R.J. Clarke, K.W. Ledingham, F. Lindau, O. Lundh, T. McCanny, P. Mora, D. Neely, C.-G. Wahlström, Scaling of proton acceleration driven by petawatt-laser–plasma interactions, *Nature physics*, 3 (2007) 58-62. <https://doi.org/10.1038/nphys476>