Document Type: Full length research Paper

Pages: 57-68

Investigating of Singularity of Central Shape Invariant Potentials

Taha Koohrokhi*, Abdolmajid Izadpanah, Seyed Jamaledin Hosseinikhah

Department of Physics, Faculty of Sciences, Golestan University, Gorgan, Iran

Received: 24.05.2023 Final revised: 02.10.2023 Accepted: 27.11.2023

Doi: 10.22055/jrmbs.2024.18897

Abstract

In this research, the singularity of the central shape-invariant potentials, which have a singularity of the inverse-square power α/r^2, has been investigated. It has been shown that in quantum mechanics, for $\alpha \geq \frac{3}{4}$, the eigenvalue problem is well-defined and, as a result, the energy spectrum can be determined. In the transition region, for $-\frac{1}{4} \leq \alpha < \frac{3}{4}$, both regular and irregular wave functions are square integrable and therefore acceptable, but the boundary conditions for determining the eigenvalues and eigenfunctions are not sufficient and there is no a specific predetermined mechanism for choosing a linear combination of wave functions. For $\alpha < -\frac{1}{4}$, the particle is drawn to the singularity, and therefore, there is no any ground state with finite energy. It has also been shown using supersymmetric quantum mechanics that the inverse-square potential is the result of the singular inverse superpotential β/r. Supersymmetric quantum mechanics provides a mechanism that, without any additional constraints, the less singular wave function is chosen and the potential is placed in the transition region for $-\frac{3}{2} < \beta < \frac{1}{2}$.

Keywords: Singularity, Supersymmetric Partner Potentials, Superpotential, Shape-Invariance, Central Symmetry

* Corresponding Author: t.koohrokhi@gu.ac.ir

مقاله پژوهشی کامل

بررسی تکینگی پتانسیل‌های شکل‌ناوردای مرکزی

طه کوهرخی*، عبدالمجید ایزدپناه، سید جمال‌الدین حسینی‌خواه

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه گلستان، گرگان، ایران

دریافت: ۱۴۰۲/۰۳/۰۳ ویرایش نهائی: ۱۴۰۲/۰۷/۱۰ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۹/۱۱
Doi: 10.22055/jrmbs.2024.18897

چکیده

در این تحقیق، تکینگی پتانسیل‌های شکل‌ناوردای مرکزی که تکینگی‌ای از نوع وارون مجذوری α/r^2 دارند، بررسی شده است. نشان داده شده است که در مکانیک کوآنتومی، به‌ازای $\frac{۳}{۴} \leq \alpha$ ، مسئلهٔ ویژه‌مقداری، خوش‌تعریف بوده و در نتیجه بیناب انرژی قابل تعیین است. در ناحیهٔ گذار، به‌ازای $-\frac{۱}{۴} \leq \alpha < \frac{۳}{۴}$ ، هر دو تابع موج باقاعده و بی‌قاعده انتگرال‌پذیر مجذوری و در نتیجه قابل قبول هستند، اما شرایط مرزی برای تعیین ویژه‌مقادیر و ویژه‌توابع، کافی نیستند و سازوکار از پیش تعیین‌شده‌ای برای انتخاب یک ترکیب خطی خاص از توابع موج وجود ندارد. به‌ازای $\alpha < -\frac{۱}{۴}$، ذره به تکینگی کشیده می‌شود و بنابراین، حالت پایه‌ای با انرژی متناهی وجود ندارد. همچنین با استفاده از مکانیک کوآنتومی ابرتقارنی نشان داده شده است که تکینگی پتانسیل وارون مجذوری، حاصل از تکینگی وارون فاصله در ابرپتانسیل β/r است. مکانیک کوآنتومی ابرتقارنی سازوکاری را ارائه می‌دهد که بدون هیچ قید اضافی، تابع موج کمتر تکین، انتخاب شده و به‌ازای $-\frac{۳}{۲} < \beta < \frac{۱}{۲}$ ، پتانسیل در ناحیهٔ گذار قرار می‌گیرد.

کلیدواژگان: تکینگی، پتانسیل‌های جفت ابرتقارنی، ابرپتانسیل، شکل‌ناوردایی، تقارن مرکزی

مقدمه

سامانه‌های متعددی در مکانیک کوآنتومی با پتانسیل‌های تکین توصیف می‌شوند. وضعیت این پتانسیل‌ها از نظر ریاضی چالش‌برانگیز و از نظر فیزیکی جالب توجه است. برای چنین سامانه‌هایی، پتانسیل، در مجموعه‌ای از نقاط که به‌آنها نقاط تکین می‌گوییم، یا روی یک ناحیه، نامتناهی می‌شود. به‌دلیل مشکلات برخاسته از تفسیر فیزیکی پتانسیل‌های تکین، فیزیک‌دانان برای مدت‌ها به‌این نتیجه رسیده بودند که برای هرگونه پتانسیل تکین در رابطه با تکینگی در مرکز نیرو، هیچ مفهومی را نمی‌توان ارائه کرد. علاوه بر این، پیچیدگی‌های محاسبات ریاضی، مشکل درک پتانسیل‌های تکین را دشوارتر می‌کردند؛ اما سرانجام مشخص شد که بسیاری از ابعاد پتانسیل‌های تکین از

* نویسنده مسئول: t.koohrokhi@gu.ac.ir

لحاظ فیزیکی معنی‌دارند و بعضی از ویژگی‌های آنها قابل استناد و استفاده است [۱]. همچنین، برای حل مشکلات محاسباتی پتانسیل‌های تکین، روش‌های ریاضی توسعه داده شده‌اند.

در سال ۱۹۶۲، مقالهٔ مهمی که توسط پرداکسی [1] و رگه [2] ارائه شد، توجه محققین را نسبت به نظریهٔ پتانسیل تکین جلب کرد [۲]. بر مبنای استدلال نویسندگان در این مقاله، برهم‌کنش‌های دنیای واقعی احتمالاً شدیداً تکین هستند. در نتیجه، مطالعهٔ پتانسیل‌های تکین به‌جای پتانسیل‌های باقاعده (ناتکین) از نظر فیزیکی پرکاربردتر است. علاوه بر این، نشان دادند که رفتار رگه، که در واقع، چارچوبی است که وابستگی دامنه‌های پراکندگی ذرات را به تکانهٔ زاویه‌ای آنها و سایر پارامترهای مرتبط، توصیف می‌کند، برای پتانسیل‌های تکین، بسیار ساده‌تر از پتانسیل‌های باقاعده است. با وجود اینکه این مفهوم را عمیقاً بررسی نکردند، اما مقالهٔ آنها، انگیزه‌ای برای مطالعهٔ ویژگی‌های پتانسیل‌های تکین شد. پتانسیل‌های تکین در مسائل مختلف فیزیکی، از جمله فیزیک مولکولی یا توصیف پراکندگی ذرات بنیادی کاربرد دارند [۳].

برای نمونه، در فیزیک مولکولی، از پتانسیل‌ها برای توصیف نیروی بین اتمی یا بین مولکولی استفاده می‌شود. این نیرو از یک بخش دوربُرد و یک بخش نزدیک‌بُرد تشکیل شده است. نیروی دوربُرد از برهم‌کنش الکترواستاتیک بین دو اتم یا مولکول ناشی می‌شود. چنین نیروهایی شامل نیروهای الکترواستاتیک خالص بین مولکول‌های قطبی و همچنین نیروهای القایی، بین مولکول‌های قطبی و غیرقطبی و نیروهای پاشیدگی [3]، بین دو مولکول غیرقطبی است. با این حال، با کاهش فاصلهٔ بین ذرات، به‌دلیل همپوشانی ابرهای الکترونی، یک نیروی دافعه ایجاد می‌شود. این نیرو از نقطه‌نظر پدیده‌شناسی، اغلب با یک پتانسیل تکین دافعه توصیف می‌شود. یک نمونهٔ پرکاربرد، پتانسیل لنارد–جونز [4] است که برای توصیف برهم‌کنش بین دو مولکول غیرقطبی استفاده می‌شود [۴]. کاربرد فوگت [5] و وانیر [6] از پتانسیل‌های تکین برای پراکندگی یون‌ها در یک گاز نیز جالب توجه است [۵].

در کاربردهای مربوط به پراکندگی ذرات بنیادی، از پتانسیل‌های تکین دافعه، برای شبیه‌سازی دافعهٔ قوی استفاده شده است که بخش نزدیک‌بُرد برهم‌کنش بین ذرات یکسان را توصیف می‌کند. استفاده از یک پتانسیل تکین دافعه، نسبت به پتانسیلی که شامل یک مغز سخت است، فراگیری بیشتری در توصیف سامانه‌های فیزیکی داشته است [۶]. یکی دیگر از کاربردهای فیزیکی پتانسیل‌های تکین در تفسیر پدیده‌شناسی پراکندگی انرژی زیاد است. تیکتوپولوس [7] (۱۹۶۵) از پتانسیل‌های تکین مختلط برای بررسی قلهٔ تیز پراکندگی کشسان رو به جلو در انرژی زیاد استفاده کرده است [۷]. نویسندگان بسیاری از پتانسیل‌های تکین در بررسی جنبه‌های مختلف نظریهٔ میدان استفاده کرده‌اند.

[1] Predazzi
[2] Regge
[3] Dispersion Forces
[4] Lennard-Jones
[5] Vogt
[6] Wannier
[7] Tiktopoulos

در ادامهٔ مقاله و در بخش بعدی، ابتدا دربارهٔ تکینگی پتانسیل‌های وارون مجذوری و نواحی مختلف آنها بحث خواهیم کرد. سپس توضیح می‌دهیم که با استفاده از سازوکار مکانیک کوآنتومی ابرتقارنی[1]، یک پتانسیل وارون مجذوری، چطور از یک ابرپتانسیل وارون فاصله ایجاد می‌شود. بعد از آن به مفهوم شکل‌ناوردایی[2] و بررسی پتانسیل‌های شکل‌ناوردای مرکزی و تحلیل تکینگی‌های آنها می‌پردازیم. سرانجام، جمع‌بندی مطالب و نتیجه‌گیری انجام می‌شود.

مکانیک کوآنتومی و پتانسیل وارون مجذوری α/r^2

قبل از بررسی پتانسیل وارون مجذوری، ابتدا به این می‌پردازیم که چرا این نوع پتانسیل، تنها موردی است که باید در نظر بگیریم؟ و چرا فقط برای این مورد به‌خصوص، قیدهایی روی α وجود دارد؟ جواب هر دو سؤال را به‌طور نیم‌کمی، می‌توان به‌این صورت ارائه کرد. میانگین انرژی یک سامانه، برابر با مجموع میانگین انرژی جنبشی و پتانسیل آن سامانه است: $E_{\text{میانگین}} = \langle T\rangle + \langle V\rangle$. فرض می‌کنیم که تابع موج اغلب در فاصلهٔ r_0 از مبدأ، قابل محاسبه است. سپس، با استفاده از استدلال‌های عدم قطعیت، می‌توانیم برآوردهای زیر را انجام دهیم: از آنجا که موقعیت ذره $\Delta r \sim r_0$ است، عدم قطعیت تکانهٔ آن از مرتبهٔ $\Delta p \sim \hbar / r_0$ می‌شود. Δp انحراف معیاری است که از رابطهٔ $\Delta p^2 = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2$ به‌دست می‌آید. اما با لحاظ‌کردن راستاهای قرینهٔ p، $\langle p\rangle = 0$ می‌شود. بنابراین، میانگین انرژی جنبشی برابر می‌شود با: $\langle T\rangle = \langle p^2\rangle/2m \approx \hbar^2/2mr_0^2$. با فرض این که پتانسیل از قانون وارون توان $V = -\alpha/r^s$ پیروی کند، مقادیر مختلف s را بررسی می‌کنیم. به‌ازای $s > 2$، هنگامی که $r_0 \to 0$، V جملهٔ غالب است. در این حالت میانگین انرژی، نامتناهی شده و در نتیجه، سامانه، نمی‌تواند حالت پایهٔ متناهی داشته باشد. این حالت، بیانگر ذره‌ای است که به تکینگی کشیده می‌شود. در مقابل، به‌ازای $s < 2$ انرژی به مقدار منفی معینی، محدود می‌شود. به‌عنوان مثالی از این نوع، می‌توانیم به اتم هیدروژن با انرژی حالت پایهٔ خوش‌تعریفش اشاره کنیم. به‌ازای $s = 2$، انرژی‌های جنبشی و پتانسیل در نزدیک r_0 هم‌مرتبه هستند، که در این صورت، پتانسیل، یک پتانسیل وارون مجذوری است و وضعیت تکینگی آن به اندازهٔ α بستگی دارد.

اکنون، سامانه‌ای را در نظر می‌گیریم که با پتانسیلی که یک تکینگی از نوع α/r^2 دارد، توصیف می‌شود. قسمت شعاعی $R(r)$ تابع موج سه‌بعدی، در رابطهٔ زیر صدق می‌کند (در اینجا، به‌منظور ساده‌سازی $\hbar = 2m = 1$ در نظر گرفته شده است):

$$-\frac{1}{r^2}\frac{dR(r)}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right) + V(r)R(r) = ER(r) \qquad (1)$$

[1] Supersymmetric Quantum Mechanics

[2] Shape Invariance

تابع جدید $\psi(r) = rR(r)$ را تعریف می‌کنیم. در نتیجه، این معادله برای $\psi(r)$، به یک معادلهٔ شرودینگر مستقل از زمان یک‌بعدی مؤثر تبدیل می‌شود:

$$-\frac{d^2\Psi(r)}{dr^2} + V(r)\psi(r) = E\psi(r)\ . \qquad ۲$$

بهنجارش تابع $\psi(r)$ از بهنجارش $R(r)$ به‌دست می‌آید:

$$\int_0^\infty |R(r)|^2 r^2\, dr = \int_0^\infty |\psi(r)|^2\, dr = 1 \qquad ۳$$

برای اینکه انتگرال آخر متناهی باشد، لازم است که تابع $|\psi(r)|^2$ نسبت به تابع $\frac{1}{r}$ در نزدیکی مبدأ، واگرایی کمتری داشته باشد؛ یعنی، $\psi(r)$ نباید در مبدأ سریع‌تر از $\frac{1}{\sqrt{r}}$ بی‌نهایت شود. در نزدیکی مبدأ، از جمله‌های متناهی، مانند $E\psi(r)$ که از α/r^2 بسیار کوچک‌تر هستند، می‌توان صرف‌نظر کرد. بنابراین، معادلهٔ۱ در نزدیکی مبدأ، به معادلهٔ زیر کاهش می‌یابد:

$$-\frac{d^2\psi(r)}{dr^2} + \frac{\alpha}{r^2}\psi(r) \approx 0\ . \qquad ۴$$

با ضرب کردن r^2 در رابطهٔ۴ و حل رابطه‌ای که به‌دست می‌آید، به این نتیجه می‌رسیم که همهٔ ویژه‌توابع در نزدیکی مبدأ، به ترکیب خطی زیر تبدیل می‌شوند:

$$\psi(r) \approx c_1 r^{\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}}\right)} + c_2 r^{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}}\right)}\ . \qquad ۵$$

در این رابطه می‌بینیم که به‌ازای $\alpha < -\frac{1}{4}$، هر دو جملهٔ رابطهٔ۵ نوسانی می‌شوند، بنابراین نمی‌توانند حالت پایهٔ بدون گره مورد نیاز را ایجاد کنند. به‌ازای $\alpha \geq \frac{3}{4}$، به‌دلیل اینکه جملهٔ اول بهنجارپذیر نیست، در نتیجه $c_1 = 0$ می‌شود. سپس، با استفاده از بهنجارش، ضریب c_2 به‌دست می‌آید. همچنین، تابع موج باید در انتهای ناتکین بازه، صفر شود که باعث کوآنتش انرژی می‌شود. بنابراین، به‌ازای $\alpha \geq \frac{3}{4}$ می‌توان بیناب انرژی را تعیین کرد.

در ناحیهٔ $-\frac{1}{4} \leq \alpha < \frac{3}{4}$ که به آن ناحیهٔ گذار[1] می‌گویند، هر دو جواب مستقل خطی معادلهٔ شرودینگر، کمتر از $\frac{1}{\sqrt{r}}$ در نزدیکی مبدأ، واگرا می‌شوند و درنتیجه بهنجارپذیرند؛ بنابراین، بدون بررسی قبلی، نمی‌توانیم بگوییم که کدام ویژه‌تابع صحیح است؛ بلکه در اصل، ویژه‌تابع صحیح، می‌تواند یک ترکیب خطی از این دو جواب باشد. باید راهی برای افزودن قیدهای بیشتر پیدا کنیم. روش‌های مختلف یافتن جواب نشان می‌دهند که جملات با توان بزرگ‌تر r، جواب صحیح هستند. طبق معمول، این جمله با توان بزرگ‌تر، تابع "کمتر تکین" نامیده می‌شود. به‌ازای توان‌های منفی r، هنگامی که حداقل یکی از جملات تکین است، این نام‌گذاری معنادار است؛ این اصطلاح حتی هنگامی که هیچ جملهٔ تکینی وجود ندارد نیز به‌کار می‌رود.

[1] Transitional Region

مکانیک کوآنتومی ابرتقارنی و ابرپتانسیل وارون فاصله β/r

به‌دست آوردن جواب‌های دقیق برای معادلهٔ شرودینگر[1] (و همتای نسبیتی آن، یعنی معادلهٔ دیراک[2]) همیشه مورد توجه مطالعات کوآنتومی بوده است. یک روش جالب برای یافتن جواب‌ها، روش عامل مشترک‌گیری است. یک هامیلتونی را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب دو عامل، که معمولاً به آنها عملگرهای بالابرنده و پایین‌برنده می‌گویند، بازنویسی کرد. این روش، یک معادلهٔ مرتبهٔ اول حل‌پذیر را جایگزین حل مستقیم معادلهٔ شرودینگر که یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم است، می‌کند. خود شرودینگر این روش را مورد توجه قرار داد و در سال ۱۹۴۰، روشی را برای عامل مشترک‌گیری هامیلتونی اتم هیدروژن و پتانسیل‌های دیگر ارائه کرد [۸]. یک دههٔ بعد، اینفلد[3] و هال[4] این روش را برای مطالعهٔ سامانه‌های متعدد دیگر تعمیم دادند (مجموعه‌ای از سامانه‌ها که اکنون به نام "پتانسیل‌های شکل‌ناوردا" معروفند) [۹]. همهٔ این ملاحظات به جلوه‌های پنهانی از یک تقارن بنیادی دلالت دارند که متعاقباً توسط مکانیک کوآنتومی ابرتقارنی تبیین شد.

در مکانیک کوآنتومی ابرتقارنی، ابرپتانسیل، به‌صورت مشتق لگاریتمی تابع موج حالت پایه $\psi_0^{(1)}(r)$ هامیلتونی H_1 تعریف می‌شود [۱۰]:

$$W(r)=-\frac{\psi_0'^{(1)}(r)}{\psi_0^{(1)}(r)}=-\frac{d}{dr}\ln\left[\psi_0^{(1)}(r)\right] \qquad ۶$$

این تعریف، به‌ازای ابرتقارنی نشکسته معتبر است که در آن انرژی حالت پایهٔ هامیلتونی H_1، صفر است $E_0^{(1)}=0$. با تعریف ابرپتانسیل، پتانسیل‌های جفت ابرتقارنی (ابرجفت‌ها) با رابطهٔ زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases}V_1(r)=W^2(r)-W'(r)\\ V_2(r)=W^2(r)+W'(r)\end{cases}. \qquad ۷$$

عملگرهای نردبانی که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند، ویژه‌توابع ابرجفت‌ها را به‌هم مرتبط می‌کنند:

$$\begin{cases}A=\frac{d}{dr}+W(r)\\ A^{\dagger}=-\frac{d}{dr}+W(r)\end{cases}, \qquad ۸$$

با تعریف این عملگرها، هامیلتونی‌های جفت ابرتقارنی برابر می‌شوند با:

$$\begin{cases}H_1=A^{\dagger}A\\ H_2=AA^{\dagger}\end{cases}. \qquad ۹$$

طبق رابطهٔ۷، یک ابرپتانسیل وارون فاصله $W(r)=\frac{\beta}{r}$ می‌تواند یک پتانسیل وارون مجذوری $V_1(x)=$

[1] Schrödinger
[2] Dirac
[3] Infeld
[4] Hull

$\frac{\alpha}{r^2}$ را ایجاد کند. در این صورت طبق این رابطه خواهیم داشت:

$$\alpha = \beta^2 + \beta \quad . \qquad ۱۰$$

حل این معادله برای β، دو جواب زیر را می‌دهد:

$$\beta = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\alpha}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}}$$
$$= -\left(\frac{1}{2} \mp \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}}\right) \qquad ۱۱$$

این جواب‌ها را به این صورت بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} \beta_1 = -\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}}\right) = -(1+\beta) \\ \beta_2 = -\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}}\right) \equiv \beta \end{cases} \qquad ۱۲$$

بنابراین بر طبق رابطهٔ۵، تابع موج حالت پایه برابر می‌شود با:

$$\psi_0^{(1)}(r) = c_1 r^{(1+\beta)} + c_2 r^{-\beta} \quad . \qquad ۱۳$$

همان‌طور که در بخش پیش توضیح داده شد، جملهٔ دوم، جملهٔ کمتر تکین است.

همچنین می‌توانیم با استفاده از رابطهٔ۶ نیز تابع موج حالت پایه را به‌دست آوریم. با استفاده از این رابطه، داریم:

$$\psi_0^{(1)}(r) = N\exp\left(-\int W(r)dr\right) , \qquad ۱۴$$

که در آن N ضریب بهنجارش است. اگر در این رابطه $W(r) = \frac{\beta}{r}$ را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\psi_0^{(1)}(r) = N r^{-\beta} \quad . \qquad ۱۵$$

با استفاده از روابط۱۳ و ۱۵، نتیجهٔ زیر را می‌گیریم:

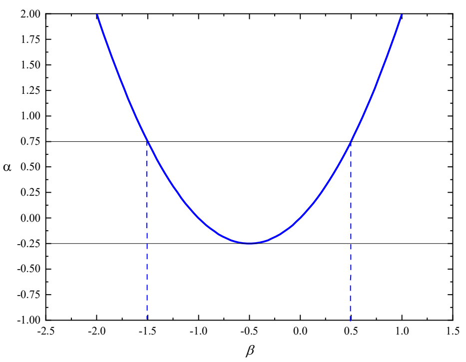
$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = N \end{cases} \qquad ۱۶$$

درمی‌یابیم که سازوکار مکانیک کوآنتومی ابرتقارنی، همواره جملهٔ کمتر تکین تابع موج حالت پایه را بدون افزودن هیچ قید اضافی، انتخاب می‌کند. در شکل ۱، α برحسب β بر طبق رابطهٔ ۱۰ رسم شده است. نتایجی که از این شکل می‌توان گرفت عبارت‌اند از:

۱- در بازهٔ $-\frac{3}{2} < \beta < \frac{1}{2}$، پتانسیل در ناحیهٔ گذار $-\frac{1}{4} \leq \alpha < \frac{3}{4}$ قرار می‌گیرد.

۲- به‌ازای همهٔ مقادیر حقیقی β، هیچ‌گاه $\alpha < -\frac{1}{4}$ نخواهد شد.

درنتیجه، تابع موجی که از ابرپتانسیل وارون فاصله و سازوکار SUSY-QM به‌دست می‌آید، همواره بهنجارپذیر است.



شکل۱. α برحسب β بر طبق رابطهٔ۱۰.

پتانسیل‌های شکل‌ناوردا با تقارن مرکزی

نوع خاصی از ابرپتانسیل‌ها وجود دارند که ابرجفت‌های حاصل از آنها از قید خاصی به‌نام شکل‌ناوردایی پیروی می‌کنند. دو ابرجفت شکل‌ناوردا، وابستگی یکسانی به متغیر اصلی دارند، اما در مقدار پارامترها با یکدیگر متفاوت‌اند. از آنجا که این دو، تنها در یک ثابت با هم اختلاف دارند، ویژه‌مقادیرشان با همان ثابت متفاوت است و هر دو دارای مجموعهٔ یکسانی از ویژه‌توابع هستند. این ویژگی شکل‌ناوردایی، سبب می‌شود که معادلهٔ شرودینگر برای این نوع از پتانسیل‌ها، جواب تحلیلی دقیق داشته باشد [۱۱].

در میدان یک برهم‌کنش مرکزی، پتانسیل‌های شکل‌ناوردای مرکزی را می‌توان با ابرپتانسیلی که به‌صورت حاصل‌جمع دو جملهٔ زیر نوشته می‌شود، به‌هم وحدت داد [۱۲]:

$$W(r,\ell)=\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\left\{w(r,\ell)-\frac{\ell+1}{r}\right\} \qquad ۱۷$$

که در آن، جملهٔ اول ابرپتانسیل مرکزی و جملهٔ دوم ابرپتانسیل گریز از مرکز نام‌گذاری شده‌اند. همان‌طور که در دو زیربخش بعدی خواهیم دید، اگر در حد $r\to -C$ که در آن C و γ ثابت هستند، ابرپتانسیل مرکزی به شکل کلی زیر تبدیل شود:

$$w(r,\ell)=\frac{\gamma}{r+C} \qquad ۱۸$$

رفتار تکینگی آن در شرایط مختلف، متفاوت است که در ادامه به آن می‌پردازیم.

ابرپتانسیل مرکزی ناتکین $(\gamma=0)$

بر طبق رابطهٔ۱۸، در یک ابرپتانسیل مرکزی $w(r,\ell)$ ناتکین، یعنی $\gamma=0$، تکینگی وارون فاصله $\frac{\beta}{r}$ در ابرپتانسیل۱۷، تنها حاصل از تکینگی ابرپتانسیل گریز از مرکز در $r=0$ است. در این حالت، صورت ابرپتانسیل گریز از مرکز را می‌توانیم برابر با β بگیریم:

$$\beta=-(\ell+1) \qquad ۱۹$$

درنتیجه، هنگامی پتانسیل در ناحیهٔ گذار قرار می‌گیرد که مشابه بازهٔ β، تکانهٔ زاویه‌ای نیز در بازهٔ $-\frac{3}{2}<\ell<\frac{1}{2}$ واقع شود. از آنجا که تکانهٔ زاویه‌ای همواره $\ell\geq 0$ است، بنابراین تنها به‌ازای $\ell=0$، پتانسیل در ناحیهٔ گذار قرار می‌گیرد.

ابرپتانسیل مرکزی تکین $(\gamma\neq 0)$

با درنظرگرفتن ابرپتانسیل مرکزی به‌صورت رابطهٔ۱۸، به‌ازای $C=0$ یک تکینگی در $r=0$ دارد. به‌علاوه، به‌ازای $C\neq 0$، دو تکینگی، یک تکینگی ابرپتانسیل گریز از مرکز در $r=0$ (که در زیربخش قبلی بررسی شد) و یک تکینگی ابرپتانسیل مرکزی در $r=-C$ داریم:

$$W(r,\ell)=\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\times\begin{cases}\frac{\gamma-(\ell+1)}{r} & \Leftarrow\quad C=0\\ \frac{\gamma}{r+C}+\frac{-(\ell+1)}{r} & \Leftarrow\quad C\neq 0\end{cases} \qquad ۲۰$$

بنابراین، برای هر حالت، β را می‌توانیم با ضرایب متناظر برابر بگیریم:

$$\begin{cases} \beta = \gamma - (\ell+1) & \Leftarrow C = 0 \\ \begin{cases} \beta_1 = \gamma & \Leftarrow r = -C \\ \beta_2 = -(\ell+1) \Leftarrow r = 0 \end{cases} & \Leftarrow C \neq 0 \end{cases} \quad ۲۱$$

بازهٔ $-\frac{3}{2} < \beta < \frac{1}{2}$ برای ناحیهٔ گذار، ایجاب می‌کند که به‌ازای بازه‌های زیر برای ضرایب γ و تکانهٔ زاویه‌ای ℓ در هر حالت، پتانسیل در ناحیهٔ گذار قرار گیرد:

$$\begin{cases} -\left(\ell+\frac{3}{2}\right) < \gamma < -\left(\ell-\frac{1}{2}\right) \Leftarrow C = 0 \\ \begin{cases} -\frac{3}{2} < \gamma < \frac{1}{2} & \Leftarrow r = -C \\ \ell = 0 & \Leftarrow r = 0 \end{cases} \Leftarrow C \neq 0 \end{cases} \quad ۲۲$$

ابرپتانسیل‌های مرکزی شکل‌ناوردا

در اینجا تکینگی ابرپتانسیل‌های مرکزی شکل‌ناوردا را به‌ترتیب بررسی می‌کنیم.

۱- ابرپتانسیل نوسانگر هماهنگ سه‌بعدی:

$$\mathcal{w}(r) = \frac{m\omega}{\hbar} r + \frac{\gamma}{r} \quad ۲۳$$

برای این ابرپتانسیل، مطابق با رابطهٔ۲۲، ضریب γ در بازهٔ زیر، پتانسیل را در ناحیهٔ گذار قرار می‌دهد:

$$-\left(\ell+\frac{3}{2}\right) < \gamma < -\left(\ell-\frac{1}{2}\right) . \quad ۲۴$$

۲- ابرپتانسیل نوسانگر هماهنگ سه‌بعدی سروته:

$$\mathcal{w}(r,\ell) = -\frac{m\omega}{2\hbar} r \quad ۲۵$$

این ابرپتانسیل مرکزی، ناتکین و در نتیجه $\gamma = 0$ است؛ بنابراین ابرپتانسیل تنها به‌ازای $\ell = 0$ در ناحیهٔ گذار قرار می‌گیرد.

۳- ابرپتانسیل پوشل-تلر مرکزی:

این ابرپتانسیل مرکزی را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب دو بخش وابسته به تکانهٔ زاویه‌ای و شعاعی نوشت [۹]:

$$\mathcal{w}_\mu(r,\ell) = g(\ell) f_\mu(r); \mu = 1,\ldots,6 \quad ۲۶$$

که در آن، بخش وابسته به تکانهٔ زاویه‌ای برابر است با:

$$g(\ell) = k_{0\ell}(\ell+2), \quad ۲۷$$

که در آن، $k_{0\ell}$ عدد موج است،

$$k_{0\ell} = \sqrt{\frac{2mR_\ell^{(\mu)}}{\hbar^2(2\ell+3)}} \quad ۲۸$$

و باقیمانده‌ها عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} R_\ell^{(1)} = R_\ell^{(2)} = \frac{\hbar^2 k_{0\ell}^2}{2m}(2\ell+3) \\ R_\ell^{(3)} = R_\ell^{(4)} = -R_\ell^{(1)} \\ R_\ell^{(5)} = -R_\ell^{(6)} = 4R_\ell^{(1)} \end{cases} . \quad ۲۹$$

همچنین، بخش‌های شعاعی ابرپتانسیل مرکزی پتانسیل پوشل-تلر مرکزی عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} f_1(r) = \tanh\{k_{0\ell}(r+C)\} \\ f_2(r) = \coth\{k_{0\ell}(r+C)\} \\ f_3(r) = -\tan\{k_{0\ell}(r+C)\} \\ f_4(r) = \cot\{k_{0\ell}(r+C)\} \\ f_5(r) = f_1(r) + f_2(r) \\ f_6(r) = f_3(r) + f_4(r) \end{cases} . \quad ۳۰$$

تابع اول، یعنی $f_1(r)$ ناتکین است $(\gamma_1 = 0)$. وضعیت‌های حدی توابع دیگر، به‌ازای $x = k_{0\ell}(r+C)$ عبارت‌اند از:

$$\lim_{x\to 0} f_2(x) = \lim_{x\to n\frac{\pi}{2}} f_3(x) = \lim_{x\to 0} f_4(x)$$

$$= \lim_{x\to 0} f_5(x) = \lim_{x\to 0, x\to n\frac{\pi}{2}} f_6(x) = \frac{1}{x}. \qquad ۳۱$$

بنابراین با جای‌گذاری روابط ۳۱ و ۲۷ در رابطهٔ۲۶، حالت حدی ابرپتانسیل پوشل-تلر مرکزی در نقاط تکین به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\lim_{r\to -C} \mathcal{w}_2(r,\ell) = \lim_{r\to n\frac{\pi}{2}-C} \mathcal{w}_2(r,\ell)$$

$$= \lim_{r\to -C} \mathcal{w}_4(r,\ell) = \lim_{r\to -C} \mathcal{w}_5(r,\ell)$$

$$= \lim_{r\to -C, r\to n\frac{\pi}{2}-C} \mathcal{w}_6(r,\ell) = \frac{\ell+2}{r+C}. \qquad ۳۲$$

به‌ازای $C \neq 0$، در این نقاط داریم:

$$\gamma = \ell + 2 \qquad ۳۳$$

در نتیجه طبق رابطهٔ۲۲، ناحیهٔ گذار، به‌ازای بازهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$-\frac{7}{4} < \ell < -\frac{3}{4} \qquad ۳۴$$

همچنین، به‌ازای $C = 0$، به‌دست می‌آوریم:

$$\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = 1 \qquad ۳۵$$

روابط ۳۴ و ۳۵ بیانگر این است که در این شرایط، هیچ‌کدام از ابرپتانسیل‌های پوشل-تلر مرکزی، در ناحیهٔ گذار قرار نمی‌گیرند. زیرا همواره تکانهٔ زاویه‌ای $\ell \geq 0$ است.

۴- پتانسیل کولنی

ابرپتانسیل مرکزی کولنی عبارت است از:

$$\mathcal{w}(\ell) = \frac{m}{\hbar^2}\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0(\ell+1)} \qquad ۳۶$$

این ابرپتانسیل فاقد تکینگی وارون فاصله و در نتیجه $\gamma = 0$ است؛ بنابراین ابرپتانسیل تنها به‌ازای $\ell = 0$ در ناحیهٔ گذار قرار می‌گیرد.

نتیجه‌گیری

در یک سامانهٔ یک‌بعدی، جمله‌ای از نوع α/r^2، استعداد شکستن کل خط حقیقی به دو نیمهٔ غیرمرتبط را دارد. مطابق با بحث ارائه‌شده در بخش دوم، این قطع‌شدن خط حقیقی، هنگامی اتفاق می‌افتد که $\alpha \geq \frac{3}{4}$ باشد. در چنین حالتی، ذره‌ای که در یک سمت تکینگی واقع شده است، هرگز نمی‌تواند به‌سمت دیگر تونل بزند. همچنین دیدیم که به‌ازای $\alpha \geq \frac{3}{4}$، مسئلهٔ ویژه‌مقداری، خوش‌تعریف بوده و با روش‌های متداول حل می‌شود. برای این حالت‌ها می‌گوییم که یک تکینگی "سخت" داریم. به‌ازای $-\frac{1}{4} \leq \alpha < \frac{3}{4}$، رفتار هر دو جواب در مبدأ، انتگرال‌پذیر مجذوری و درنتیجه قابل قبول است. به این تکینگی‌ها، تکینگی‌های "نرم" می‌گویند؛ بنابراین، شرایط مرزی برای تعیین ویژه‌مقادیر و ویژه‌توابع، کافی نیستند و سازوکار از پیش تعیین‌شده‌ای برای انتخاب یک ترکیب خطی خاص وجود ندارد. به‌این دلیل در مکانیک کوآنتومی متداول، تنها با افزودن قیدهای خاصی می‌توان بیناب سامانه را به‌دست آورد [۱۳,۱۴]. اعمال این قیدها سبب می‌شود که پتانسیل، نه ذره را به داخل بکشد و نه محور حقیقی را قطع کند. پتانسیل‌هایی که این نوع تکینگی نرم دارند را "پتانسیل‌های گذار" می‌نامند. هنگامی‌که $\alpha < -\frac{1}{4}$

باشد، ذره به تکینگی کشیده می‌شود، به‌عبارت دیگر، حالت پایه‌ای با انرژی متناهی وجود ندارد. به‌ازای $\alpha \geq \frac{3}{4}$ ویژه‌مقادیر و ویژه‌توابع از شرط بهنجارش به‌دست می‌آیند. با این حال، به‌ازای $-\frac{1}{4} \leq \alpha < \frac{3}{4}$، مسئله را بدون افزودن قیدهای بیشتر نمی‌توان حل کرد. در این مقاله با استفاده از مکانیک کوآنتومی ابرتقارنی نشان دادیم که یک پتانسیل وارون مجذوری α/r^2 از یک ابرپتانسیل وارون فاصله β/r به‌دست می‌آید. پتانسیلی که از این ابرپتانسیل به‌دست می‌آید، بدون نیاز به قیدهای اضافی، به‌طور خودکار جملهٔ کمتر تکین را برگزیده و هیچگاه در بازهٔ $\alpha < -\frac{1}{4}$ قرار نمی‌گیرد. همچنین، با استفاده از این سازوکار، ابرپتانسیل‌های مرکزی و شرایط قرارگرفتن پتانسیل‌های مرکزی حاصل از آنها را در ناحیهٔ گذار بررسی کردیم.

مرجع‌ها

[1] W.M. Frank, D.J. Land, R.M. Spector, Singular potentials, Reviews of Modern Physics, 43 (1971) 36. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.43.36

[2] E. Predazzi, T. Regge, The maximum analyticity principle in the angular momentum, Il Nuovo Cimento (1955-1965), 24 (1962) 518-533. https://doi.org/10.1007/BF02751361

[3] H.-W. Hammer ,S. König, U. Van Kolck, Nuclear effective field theory: status and perspectives, Reviews of Modern Physics, 92 (2020) 025004. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.92.025004

[4] S.A. Isaacson, D. Isaacson, Reaction-diffusion master equation, diffusion-limited reactions, and singular potentials, Physical Review E, 80 (2009) 066106. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.80.066106

[5] E. Vogt, G.H. Wannier, Scattering of ions by polarization forces, Physical Review, 95 (1954) 1190. https://doi.org/10.1103/PhysRev.95.1190

[6] J. Oller, Coupled-channel approach in hadron–hadron scattering, Progress in Particle and Nuclear Physics, 110 (202)103728. https://doi.org/10.1016/j.ppnp.2019.103728

[7] G. Tiktopoulos, High-energy large-angle scattering by singular potentials, Physical Review, 138 (1965) B1550. https://doi.org/10.1103/PhysRev.138.B1550

[8] E. Schrödinger, Further studies on solving eigenvalue problems by factorization, Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences, JSTOR, 1940, pp. 183-206. https://www.jstor.org/stable/20490756

[9] L. Infeld, T. Hull, The factorization method, Reviews of modern Physics, 23 (1951) 21. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.23.21.

[10] E. Witten, Dynamical breaking of supersymmetry, Nuclear Physics B, 188 (1981) 513-554. https://doi.org/10.1016/0550-3213(81)90006-7

[11] J.V. Mallow, A. Gangopadhyaya, J. Bougie, C. Rasinariu, Inter-relations between additive shape invariant superpotentials, Physics Letters A, 384 (2020) 126129. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2019.126129

[12] T. Koohrokhi, A. Izadpanah, M. Gerayloo, A Unified Scheme of Shape Invariant Potentials with Central Symmetry, arXiv e-prints, DOI (2020) arXiv: 2001.02068. https://doi.org/10.48550/arXiv.2001.02068

[13] L. Landau, E. Lifshitz, Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory, Pergamon Press, New York, (1977).

[14] A. Gangopadhyaya, P. Panigrahi, U. Sukhatme, Analysis of inverse-square potentials using supersymmetric quantum mechanics, Journal of Physics A: Mathematical and General, 27 (1994) 4295 .https://doi.org/10.1088/0305-4470/27/12/032