

Solitary Wave Solutions of the Multi-Field Sine-Gordon System

Mohammad Mohammadi¹, Alireza Olamaei^{2,*}

¹ Department of Physics, Faculty of Science, Persian Gulf University, Bushehr, Iran

² Department of Physics, Faculty of Science, Jahrom University, Jahrom, Iran

Received: 05.03.2024 Final revised: 09.06.2024 Accepted: 29.09.2024

Doi: [10.22055/jrmb.2024.19490](https://doi.org/10.22055/jrmb.2024.19490)

Abstract

In this paper, we introduce solitary solutions of the nonlinear multi-field sine-Gordon system. Despite the use of several independent entangled fields to introduce this system, but the collective behavior of these fields can lead to kink (antikink) solutions with the same macroscopic characteristics. In other words, a kink can be constructed in infinitely different states in terms of internal structure. The important point about this internal structure is that the output of the collisions is effectively dependent on it and we are actually witnessing an uncertainty in the output of the collisions. Radiative solutions are another type of solution of the multi-field sine-Gordon system that naturally appears in all kink-antikink collisions. Conversely, the collision of two topological radiative solutions can result in the creation of a kink-antikink pair.

Keywords: Sine-Gordon, kink, Radiative profiles, Uncertainty

Corresponding Author: olamaei@jahromu.ac.ir*

جواب‌های موجی منفرد سیستم سینوسی گوردون چند میدانه

محمد محمدی^۱، علیرضا علمائی^{۲*}

^۱گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر، ایران

^۲گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه جهرم، جهرم، ایران

دریافت: ۱۴۰۲/۱۲/۱۵ نهایی: ۱۴۰۳/۰۳/۲۰ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۷/۰۲

Doi: [10.22055/jrmb.2024.19490](https://doi.org/10.22055/jrmb.2024.19490)

چکیده

در این مقاله به معرفی جواب‌های منفرد سیستم غیرخطی سینوسی گوردون چند میدانه می‌پردازیم. علی‌رغم استفاده از تعدادی میدان مستقل در هم‌تنیده برای معرفی این سیستم، ولی رفتار جمعی این میدان‌ها می‌تواند به جواب‌های کینک (پادکینک) با ویژگی‌های ماکروسکوپی یکسان منتج شود. به بیانی دیگر یک کینک به لحاظ ساختار داخلی به بینهایت وضعیت متفاوت می‌تواند ساخته شود. نکته مهم در رابطه با این ساختار داخلی آن است که خروجی برخوردها به‌طور مؤثری به آن وابسته بوده و عملاً شاهد یک عدم قطعیت در خروجی برخوردها هستیم. جواب‌های تابشی نوع دیگری از جواب‌های سیستم سینوسی گوردون چند میدانه می‌باشد که به‌طور طبیعی در همه برخوردهای ناهم‌فاز کینک-پادکینک ظاهر می‌شوند. برعکس، برخورد دو جواب تابشی توپولوژیک می‌تواند به خلق یک زوج کینک-پادکینک منتج شود.

کلیدواژه‌گان: سینوسی گوردون، کینک، بسته‌های تابشی، عدم قطعیت

مقدمه

موج منفرد را می‌توان از جنبه‌های مختلف دسته‌بندی کرد. اگر معادلات حاکم بر آنها نسبتی (کلاسیکی) باشد آنها را جواب‌های منفرد نسبتی (کلاسیکی) می‌نامیم. اگر رفتار آنها در بی‌نهایت (مرزها) به مقادیر متفاوتی میل کند آنها را توپولوژیک می‌نامیم و در غیر این‌صورت، اگر مقادیر آنها در مرزها یکسان باشند غیرتوپولوژیک خواهند بود. خاصیت توپولوژیکی از این بابت مهم است که تضمینی بر پایداری است، به بیانی دیگر اگر یک جواب منفرد، توپولوژیک باشد ذاتاً پایدار بوده و کمینه انرژی را خواهد داشت. به‌عنوان نمونه‌هایی از جواب‌های توپولوژیکی نسبتی در فضا-زمان ۱+۳ بعدی، می‌توان به ریسمان‌ها، تک قطبی‌های

در طول چند دهه اخیر، معادلات موج غیرخطی با جواب‌های منفرد یا سالیتمونی نقش مهمی در توصیف پدیده‌های مختلف در شاخه‌های مختلف فیزیک از جمله اپتیک [۱،۲]، ماده چگال [۳،۴]، ذرات بنیادی [۵،۶] و بیوفیزیک [۷] داشته است. جواب‌های منفرد ویژه جواب‌های معادلات موج غیرخطی هستند که می‌توانند آزادانه و بدون هیچ‌گونه اعوجاجی در ظاهر خود منتشر شوند. علاوه بر این، چگالی انرژی متناظر آنها جایگزیده است. سالیتمون‌ها نوع خاصی از جواب‌های منفرد هستند که ظاهر و سرعت آنها پس از برخورد بدون هیچ تغییری بازیابی می‌شوند. جواب‌های

* نویسنده مسئول: olamaei@jahromu.ac.ir

مغناطیسی و اسکرمیون‌ها [۸-۱۱] اشاره نمود که در کیهان‌شناسی و فیزیک هادرونی کاربرد دارند. در رابطه با سیستم‌هایی با جواب‌های منفرد کلاسیکی (توپولوژیک و غیر توپولوژیک) کارهای زیادی انجام شده است که از میان آن‌ها می‌توان به معادله KdV ، معادله شرودینگر غیرخطی و برگرز را اشاره نمود [۱۴-۱۲].

در فضا-زمان $1+1$ بعدی، ساده‌ترین مدل‌هایی که می‌تواند به جواب‌های منفرد توپولوژیک ختم شود گونه‌ای از سیستم‌های کلاین گوردون غیرخطی است که جواب‌های خاص آن‌ها را کینک و پادکینک می‌نامند [۵،۶]. اهمیت و کاربرد چنین جواب‌هایی به‌صراحت در مطالعه حرکت موج در مولکول‌های DNA و صفحات گرافن نشان داده شده است [۷،۱۵-۲۰]. در میان انواع زیادی از سیستم‌های دارای جواب‌های کینک (پادکینک)، دو سیستم ϕ^4 و سینوسی-گوردون (SG) به‌طور خاص و ویژه مورد مطالعه قرار گرفته‌اند [۵،۶]. جدا از کاربردهای فراوان، از جنبه ریاضیاتی سیستم سینوسی-گوردون از این بابت مهم است که تنها سیستم کلاین گوردون $1+1$ بعدی است که جواب‌های کینک و پادکینک آن به‌تمام معنا خاصیت سالیتمی دارند.

سیستم سینوسی گوردون و کلاً سیستم‌هایی با جواب‌های کینک، بر مبنای یک تک‌میدان خود-برهم‌کنش تعریف شده‌اند. با این حال نسخه‌های دومیدانی آن‌ها هم مورد توجه محققین بوده است و حاوی جزئیات و غنای بیشتری می‌باشند [۲۱-۲۴]. در این مقاله یک نسخه چندمیدانی از سیستم سینوسی گوردون معرفی می‌نمایم که در آن هرکدام از میدان‌ها یک ساختار توپولوژیک مستقل دارند ولی جمیع آن‌ها می‌بایست به یک ساختار مشخص توپولوژیک مقید شوند. این مدل در واقع راهی برای ایجاد یک ساختار درونی جواب‌های کینک و پادکینک سیستم سینوسی

گوردون پیشنهاد می‌دهد، ساختاری که در شرح جزئیات ماکروسکوپیکی یک جواب منفرد (مثل شکل و انرژی) بی‌اثر است ولی در برهم‌کنش‌ها به‌صورت قابل ملاحظه‌ای تأثیرگذار است. به بیانی دیگر این مدل چندمیدانی به‌خوبی به‌ما نشان می‌دهد که چگونه مفاهیمی همچون عدم قطعیت در خروجی برهم‌کنش‌ها را می‌توان از یک مدل غیرخطی به‌سادگی نتیجه گرفت. برای نسخه چندمیدانه سیستم سینوسی-گوردون، در کنار جواب‌های کینک و پادکینک، نوع دیگری از جواب‌های منفرد به‌نام جواب‌های تابشی حاصل می‌شود که جرم سکون صفر داشته و با سرعت نور حرکت می‌کنند. نتایج عددی نشان می‌دهد که در برخورد بین زوج‌های کینک-پادکینک، همیشه (غیر از موارد خاص) شاهد ظهور چنین موجوداتی هستیم. به‌صورت عکس، نشان داده‌ایم که برخورد دو جواب تابشی توپولوژیک می‌تواند به خلق یک زوج کینک-پادکینک چندمیدانه ختم شود.

باید توجه داشت که پیش از این در مقاله [۲۵] نسخه دومیدانه این نوع از سیستم‌ها تحت عنوان سیستم سینوسی گوردون مختلط بررسی شده است. همچنین برای نوع مختلط سیستم‌های ϕ^4 و ϕ^6 می‌توان به مقالات [۲۶،۲۷] اشاره نمود. مقاله حاضر در واقع تعمیمی از کارهای قبلی است و با بیانی ریاضیاتی و جامع، ولی به‌صورت خلاصه، ایده کینک (پادکینک)‌های چندمیدانه را مطرح می‌کند.

سیستم سینوسی گوردون تک‌میدانه

چگالی لاگرانژی استاندارد سیستم نسبیتی غیرخطی سینوسی گوردون در فضا-زمان $1+1$ بعدی به‌وسیله چگالی لاگرانژی زیر معرفی می‌شود:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - (1 - \cos \phi) \quad (1)$$

سیستم سینوسی گوردون n میدانه

در حالت کلی یک سیستم سینوسی گوردون n میدانه با استفاده از چگالی لاگرانژی زیر معرفی می‌شود:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \partial_{\mu} \phi_i \partial^{\mu} \phi_i - (1 - \cos R) \quad ۶$$

که در آن

$$R = (\sum_{i=1}^n \phi_i^2)^{1/2} \quad ۷$$

به‌عنوان میدان اندازه میدان‌ها یا مدول معرفی می‌شود و ϕ_i ها حقیقی هستند. نسخه $n = 1$ همان سیستم سینوسی گوردون معروف رابطه ۱ می‌باشد. مورد $n = 2$ قبلاً در مقاله [۳] تحت عنوان سیستم سینوسی گوردون مختلط بررسی شده است و به‌طور هم‌ارز می‌توان آن را سیستم میدانی دومیدانه نامید. نسخه مشابه روابط ۳ و ۴ برای تانسور انرژی-تکانه و چگالی انرژی به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$T^{\mu\nu} = \sum_{i=1}^n \partial_{\mu} \phi_i \partial^{\nu} \phi_i - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad ۸$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\dot{\phi}_i^2 + \phi_i'^2) + 1 - \cos R. \quad ۹$$

معادلات دینامیکی مرتبط با چگالی لاگرانژی ۶ به‌صورت زیر قابل حصول است:

$$\partial_{\mu} \partial^{\mu} \phi_i = -\frac{\phi_i}{R} \sin(R). \quad (i = 1, \dots, n) \quad ۱۰$$

به‌دلیل ماهیت ۱+۱ بعدی این سیستم، n کمیت پایسته بار توپولوژیک وجود دارد:

$$Q_i = \int_{-\infty}^{+\infty} J_i^0 dx, \quad (i = 1, \dots, n) \quad ۱۱$$

که در آن ϕ یک میدان نرده‌ای می‌باشد. با توجه به اصل کمترین کنش، معادله دینامیکی مربوطه به فرم زیر حاصل خواهد شد:

$$\partial_{\mu} \partial^{\mu} \phi = -\sin(\phi). \quad ۲$$

تانسور انرژی تکانه مربوط به چگالی لاگرانژی ۱ با به‌کارگیری قضیه نوئدر^۱ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$T^{\mu\nu} = \partial^{\mu} \phi \partial^{\nu} \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad ۳$$

که در آن $g^{\mu\nu}$ تانسور متریک می‌باشد ($g^{00} = 1$ ، $g^{10} = g^{01} = 0$ و $g^{11} = -1$) مؤلفه T^{00} این تانسور به‌عنوان چگالی انرژی تعبیر می‌شود:

$$\varepsilon(x, t) = \frac{1}{2} (\dot{\phi}^2 + \phi'^2) + 1 - \cos \phi, \quad ۴$$

که در آن علامت‌های نقطه و پرایم به ترتیب به معنای مشتق زمانی و مشتق مکانی هستند. باید توجه داشت که در کل این مقاله برای سادگی سرعت نور c را برابر با واحد فرض کرده‌ایم.

برای سیستم سینوسی گوردون ۱ دو جواب معروف کینک (علامت +) و پادکینک (علامت -) به‌عنوان دو جواب منفرد رونده به‌صورت:

$$\phi(x, t) = 4 \tan^{-1}(e^{\pm\gamma(x-vt-)}), \quad ۵$$

به‌دست می‌آیند. در اینجا v سرعت جواب منفرد، a مکان اولیه و $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ ضریب لورنتس می‌باشد. این دسته جواب‌های منفرد سیستم سینوسی گوردون خاصیت سالیوتونی دارند، به‌این معنی که بدون هیچ‌گونه تغییری در هر برخوردی مجدداً ظاهر می‌شوند.

¹ Noether's theorem

$$\phi_i = \alpha_i (4 \tan^{-1}(e^{\pm\gamma(x-vt-a)})) \quad ۱۶$$

که معرف یک جواب کینک (پادکینک) برای یک سیستم سینوسی-گوردون n میدانه است که با سرعت v به سمت راست حرکت می کند.

برای کینک (پادکینک)های مختلف ۱۶ با α_i های متفاوت که سرعت های یکسان دارند، مستقل از مقادیر α_i ها (که شرط ۱۵ را ارضاء می کنند)، تانسور انرژی تکانه ۸ یکسان خواهد بود. به عبارت دیگر تانسور انرژی و تکانه ۸ برای جواب های کینک (پادکینک) تنها وابسته به سرعت می باشد. انرژی و تکانه یک جواب کینک (پادکینک) از طریق انتگرال گیری روی مؤلفه T^{00} و T^{01} حاصل می شود. به سادگی می توان نشان داد که روابط استاندارد انرژی-تکانه نسبیتی مطابق انتظار برقرار خواهد بود:

$$E_v = \gamma E_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} T^{00} dx, \quad ۱۷$$

$$p = \gamma m_0 v = \int_{-\infty}^{+\infty} T^{01} dx, \quad ۱۸$$

در اینجا E_0 ، E_v و p به ترتیب انرژی سکون، انرژی کل و تکانه یک جواب کینک (پادکینک) هستند که با سرعت v حرکت می کند. بنابراین مستقل از α_i ها، جواب های کینک (پادکینک) به عنوان جواب هایی شبه ذره ای انرژی سکون یکسان دارند. با این حال نشان می دهیم تفاوت در ساختار درونی یک کینک (تفاوت در α_i ها) نقش بسیار تعیین کننده ای در خروجی برخوردار دارد.

جواب های کینک (پادکینک) اساساً توپولوژیک هستند و برای آنها خواهیم داشت: $Q_i = J_i^0 = C\alpha_i\phi'$ که در آن $\phi = 4 \tan^{-1}(e^{\pm\gamma(x-vt-a)})$ همچنین برای این جواب ها، چگالی جریان بار الکتریکی همیشه صفر می باشد $j_{(l,m)}^\mu = 0$.

که در آن J_i^0 مؤلفه صفرم بردار نسبیتی J_i^μ (چگالی جریان بار توپولوژیک) می باشد که به صورت زیر تعریف می شود:

$$J_i^\mu = C\epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi_i \quad ۱۲$$

در اینجا C صرفاً یک عدد ثابت دلخواه و $\epsilon^{\mu\nu}$ تانسور پاد متقارن 2×2 می باشد [۲۷]. به سادگی می توان نشان داد هر کدام از این بردارهای نسبیتی، یک معادله پیوستگی ($\partial_\mu J_i^\mu = 0$) را ارضاء می کنند.

علاوه بر این، برای هر دو میدان متفاوت ϕ_m و ϕ_l می توان یک بردار نسبیتی جدید (مشابه چگالی جریان بار الکتریکی) به صورت زیر تعریف نمود:

$$j_{(l,m)}^\mu = C'(\phi_l \partial^\mu \phi_m - \phi_m \partial^\mu \phi_l) \quad ۱۳$$

که در آن C' یک عدد دلخواه است. مطابق معادلات ۱۰ به سادگی می توان نشان داد معادله پیوستگی در اینجا نیز برقرار است ($\partial_\mu j_{(l,m)}^\mu = 0$). دقت شود $j_{(l,m)}^\mu = j_{(m,l)}^\mu$ و $m \neq l$. به عبارت دیگر $n(n-1)/2$ چاربردار مستقل $j_{(l,m)}^\mu$ داریم. برای هر کدام از این چاربردارها کمیت پایسته (مشابه بار الکتریکی) به صورت زیر خواهد بود:

$$q_{(l,m)} = \int_{-\infty}^{+\infty} j_{(l,m)}^0 dx. \quad ۱۴$$

جواب های کینک (پادکینک) n میدانه

برای n معادله جفت شده ۸ چنانچه n ثابت α_i به نحوی داشته باشیم که شرط

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1 \quad ۱۵$$

برقرار باشد، در این صورت جوابی به صورت زیر در حالت کلی وجود خواهد داشت:

جواب‌های تابشی

اگر تابعیت میدان‌ها برحسب فضا-زمان و در همه زمان‌ها و مکان‌ها به صورت $\Phi_i(x \pm t)$ باشد، مشروط به اینکه

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i^2 = (2m\pi)^2, \quad m \in \mathbb{N}, \quad ۱۹$$

در این صورت یک جواب رونده با سرعت نور ($c = 1$) خواهیم داشت که آن را یک جواب تابشی می‌نامیم. در واقع برای شرط ۱۹ سمت راست معادلات دینامیکی ۱۰ صفر می‌شود و عملاً n معادله موج خطی داریم که جواب‌هایی رونده با سرعت نور نتیجه می‌دهند. برای نمونه برای سیستم سه میدان جوابی به صورت زیر یک جواب تابشی خواهد بود:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= e^{-(x-t)^2}, \quad \Phi_2 = e^{-2(x-t)^4} \\ \Phi_3 &= \sqrt{4\pi^2 - e^{-2(x-t)^2} - e^{-4(x-t)^4}} \quad ۲۰ \end{aligned}$$

برای چنین جواب‌هایی می‌توان به سادگی نشان داد رابطه بین انرژی و تکانه همان رابطه‌ای است که برای فوتون‌ها (موجوداتی با جرم سکون صفر) انتظار داریم:

$$p = \pm E. \quad ۲۱$$

$$\text{که در آن } E = \int_{-\infty}^{+\infty} T^{00} dx \text{ و } p = \int_{-\infty}^{+\infty} T^{01} dx$$

جواب‌های تابشی ممکن است توپولوژیک ($Q_i \neq 0$) یا غیر توپولوژیک ($Q_i = 0$) باشند. همچنین بار الکتریکی برای آنها ممکن است صفر یا غیر صفر باشد.

ملاحظات عددی

از آنجا که معادلات دینامیکی ۱۰ غیرخطی هستند، ترکیب خطی دو یا چند جواب منفرد کینک و پادکینک

لزوماً یک جواب نخواهد بود. با این حال اگر مرکز جواب‌های منفرد در لحظات اولیه از هم به اندازه کافی زیاد باشند این ترکیب خطی با اضافه نمودن چند عدد ویژه به طور تقریبی یک جواب خواهد بود. به عنوان نمونه، برای برخورد یک زوج کینک-پادکینک (پادکینک-کینک) سه میدان که مکان اولیه آنها به ترتیب a و b و سرعت‌های اولیه‌شان به ترتیب v_1 و v_2 باشد، ترکیب خطی زیر برای لحظات اولیه مشروط به اینکه $|b - a| \gg 1$ باز هم یک جواب خواهد بود:

$$\Phi_1 = \alpha_1 \varphi(a, v_1) + \beta_1 \Phi(b, v_2) - C_1$$

$$\Phi_2 = \alpha_2 \varphi(a, v_1) + \beta_2 \Phi(b, v_2) - C_2$$

$$\Phi_3 = \alpha_3 \varphi(a, v_1) + \beta_3 \Phi(b, v_2) - C_3$$

۲۲

که در آن

$$\varphi(a, v_1) = 4 \tan^{-1}(e^{+\gamma_1(x-v_1t-a)})$$

و

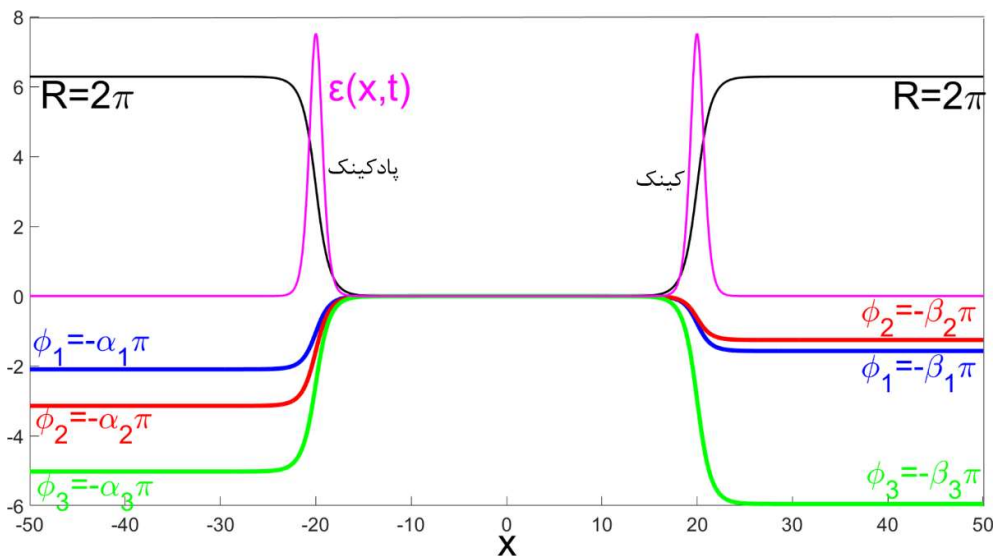
$$\Phi(b, v_2) = 4 \tan^{-1}(e^{-\gamma_2(x-v_2t-b)})$$

البته باید دقت داشت که $\sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 = 1$ و

$$\sum_{i=1}^3 \beta_i^2 = 1 \text{ در روابط ۲۲ برای ثابت‌های } C_1,$$

C_2 و C_3 باید اعداد خاصی انتخاب شوند، برای نمونه:

$$C_i = (\alpha_i + \beta_i)2\pi, \quad i = 1, 2, 3 \quad ۲۳$$



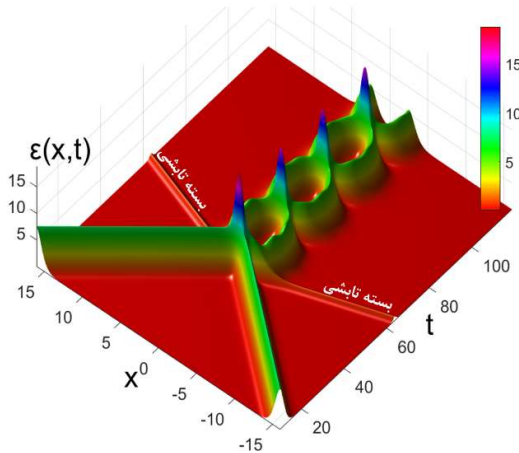
شکل ۱. نمایش میدان‌ها و میدان اندازه حاصل از آنها (R) برای جواب تقریبی ۲۲. انتخاب ثابت‌های C_1 ، C_2 و C_3 به نحوی انجام

شده که میدان اندازه R بین 0 تا 2π قرار گیرد. وضعیت تصویر شده به‌ازاء $\alpha_1 = \frac{1}{6}$ ، $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ ، $\alpha_3 = \frac{\sqrt{26}}{6}$ ، $\beta_1 = \frac{1}{2}$ ، $\beta_2 = \frac{\sqrt{74}}{10}$ ، $\beta_3 = \frac{1}{10}$ به‌دست آمده است.

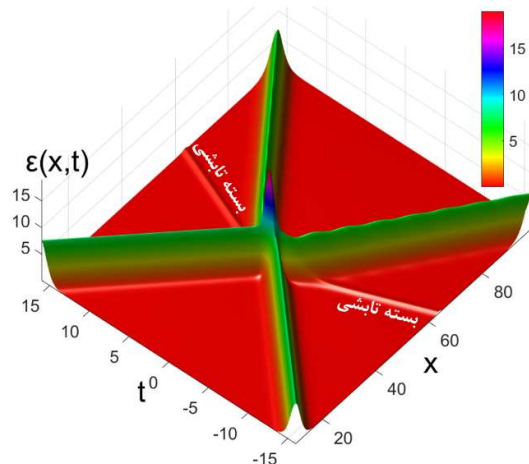
را به‌اندازه کافی دور اختیار می‌کنیم، مثلاً $x_l = -100$ (دیواره سمت چپ) و $x_r = 100$ (دیواره سمت راست). در تمام نتایج عددی $a = -20$ و $b = 20$ انتخاب می‌شود و این دو انتخاب برای اطمینان از عدم هم‌پوشانی نواحی نزدیک به مراکز زوج‌های کینک و پادکینک بر روی یکدیگر کفایت می‌کند. برای سادگی در محاسبات بهتر این است که خود را به دستگاه مرکز جرم محدود نماییم یعنی وضعیتی که $v_1 = -v_2$.

در واقع این اعداد باید به نحوی انتخاب شوند که میدان اندازه R بر روی مرزها ($\pm\infty$) برابر با یکی از نقاط خلأ بشود (شکل ۱). یک نقطه خلأ، یک میدان خاص است که به‌ازاء آن پتانسیل صفر می‌شود. برای سیستم سینوسی گوردون نقاط خلأ عبارتند از $2m\pi$ که در آن m یک عدد صحیح می‌باشد. برای معرفی کینک سه-میدانه می‌بایست تغییرات R مربوطه را بررسی کنیم. اگر مقدار R سمت راست (چپ) بیشتر از سمت چپ (راست) باشد با یک کینک (پادکینک) روبرو هستیم. با معرفی رابطه ۲۲ به‌عنوان شرط اولیه برای معادلات دینامیکی ۱۰، شرایط برای به‌کارگیری یک روش عددی جهت یافتن خروجی برخورد یک کینک-پادکینک مهیا است. در اینجا یک روش تفاضلی محدود با گام‌های فضایی $h = 0.02$ و زمانی $k = 0.015$ استفاده می‌کنیم. مرزها را به‌مقادیر مشخص شده در شکل ۱ ثابت می‌کنیم، ولی برای اینکه مطمئن باشیم خروجی برخوردها در طی اجرای برنامه به مرزها نمی‌رسند آنها

نتایج عددی



شکل ۲. نمایش چگالی انرژی برخورد یک کینک-پاد کینک با سرعت $v = 0.4$ و با داده‌های مشخص شده در متن (حالت ۱).



شکل ۳. نمایش چگالی انرژی برخورد یک کینک-پاد کینک با سرعت $v = 0.4$ و با داده‌های مشخص شده در متن (حالت ۲).

و تندی آنها بعد از برخورد کمتر می‌باشد. به دلیل بقای بار توپولوژیک، مطمئن هستیم ساختار زوج قبل و بعد عوض نمی‌شود. برای نمونه در شکل ۳ خروجی مربوط به زوج

$$\beta_1 = \frac{1}{4}, \alpha_3 = \frac{\sqrt{191}}{15}, \alpha_2 = \frac{1}{2}, \alpha_1 = \frac{1}{3}$$

$$v_1 = 0.4 \text{ به } \beta_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و } \beta_2 = \frac{1}{5}$$

مشاهده می‌شود.

مهم‌ترین نکته‌ای که از خروجی برخوردهای کینک-پاد کینک برای سیستم‌های n میدانه (در اینجا برای سادگی تنها مورد $n = 3$ بررسی شده است) وجود دارد آن است که خروجی برخوردها به‌طور مؤثری به اعداد β_i و α_i بستگی دارد. برای وضعیتی که $\alpha_i = \beta_i$ عملاً نتیجه همان است که از خروجی برخوردهای زوج کینک-پاد کینک در سیستم سینوسی گوردون تک میدانه شناخته شده است. برای وضعیت $\alpha_i = -\beta_i$ خروجی دقیقاً مشابه وضعیت برخورد یک زوج کینک-کینک (پاد کینک-پاد کینک) در سیستم سینوسی گوردون تک میدانه است. به عبارت دیگر برای این دو وضعیت، عملاً بدون هیچ‌گونه تغییری در شکل و جزئیات، چگالی انرژی وضعیت قبل و بعد از برخورد یکسان خواهد بود.

برای وضعیت‌های غیر مشابه با موارد قبل همیشه شاهد ظهور دو بسته موج تابشی خواهیم بود. منظور از بسته موج تابشی یک جواب تابشی با چگالی انرژی جایگزیده می‌باشد. البته این وضعیت برای یک سرعت برخوردی مشخص به دو صورت متفاوت رقم می‌خورد:

۱. زوج برخورد کننده نابود می‌شوند و از خروجی آنها دو بسته موج تابشی به همراه یک جواب تپنده^۱ تولید می‌شود. برای نمونه در شکل ۲ نتیجه خروجی مربوط به زوج

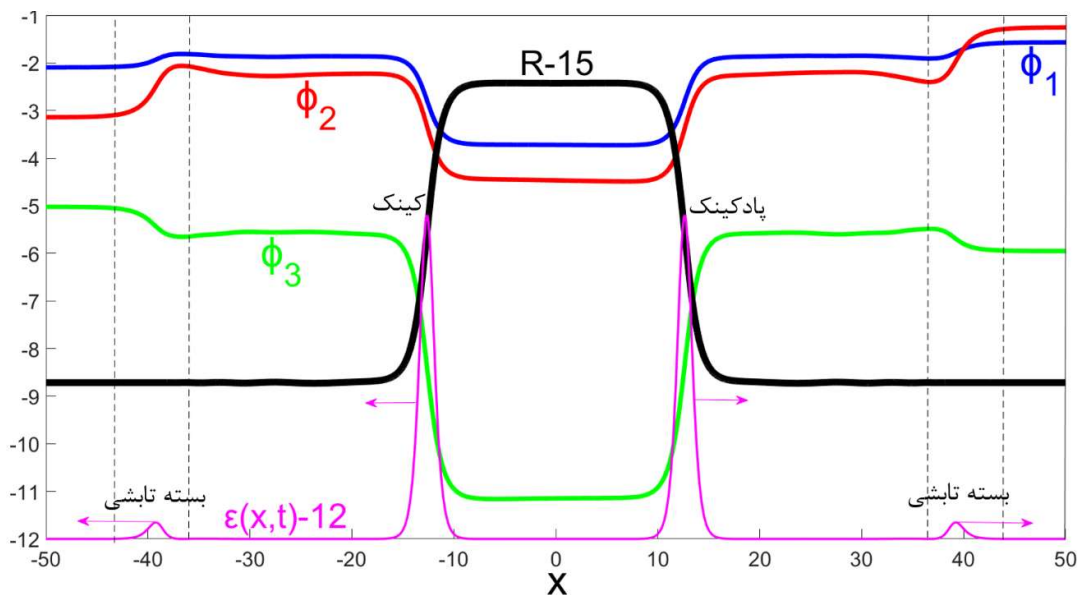
$$\beta_1 = \frac{1}{2}, \alpha_3 = \frac{\sqrt{26}}{6}, \alpha_2 = \frac{1}{2}, \alpha_1 = \frac{1}{6}$$

$$v_1 = 0.4 \text{ به } \beta_3 = \frac{\sqrt{74}}{10} \text{ و } \beta_2 = \frac{1}{10}$$

دیده می‌شود.

۲. زوج برخورد کننده به همراه یک زوج بسته تابشی مجدد ظاهر می‌شوند ولی بدیهی است که انرژی

^۱ Breather



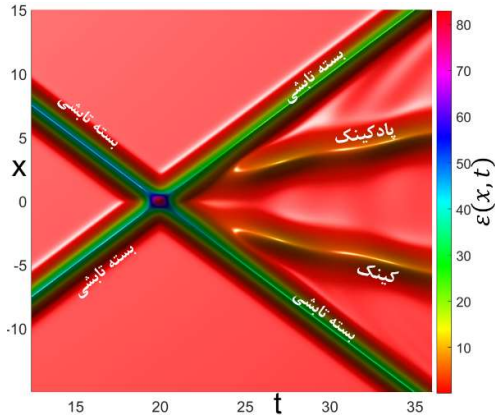
شکل ۴. نمایش میدان‌ها، میدان اندازه حاصل از آنها (R) و چگالی انرژی برای بعد از برخورد مربوط به حالت ۲ در زمان $t = 87$. این شکل نتیجه شکل ۱ به عنوان شرط اولیه می‌باشد. برای اینکه میدان اندازه و چگالی انرژی همگی در یک صفحه واقع شوند مجبور شدیم آنها را به اعداد نوشته شده ۱۵ و ۱۲ رو به پایین جابه‌جا نماییم.

ترکیب مشخص از α_i ها و β_i ها همواره یک سرعت آستانه وجود دارد که برای سرعت‌های کمتر از آن جذب و برای سرعت‌های بیشتر از آن پراکندگی رقم می‌خورد. برای به دست آوردن سرعت آستانه، دو سرعت که به‌ازاء یکی جذب و به‌ازاء دیگری پراکندگی اتفاق می‌افتد را انتخاب می‌کنیم. سپس واری می‌کنیم که برای میانگین این دو سرعت جذب یا پراکندگی، کدامیک رقم می‌خورد. فرض کنیم به‌ازاء میانگین جذب اتفاق می‌افتد. حال بین سرعت میانگین و سرعت پراکندگی مجدداً میانگین گرفته و مجدد جذب یا پراکندگی آن را بررسی می‌کنیم. به همین ترتیب بازه‌های کوچک‌تری از سرعت بین جذب و پراکندگی به صورت عددی حاصل می‌شود تا به سرعت آستانه نزدیک‌تر شویم. مثلاً برای حالت ۲ این سرعت آستانه $v_c \approx 0.274$ و برای حالت ۱، $v_c \approx 0.429$ می‌باشد. ظهور بسته‌های تابشی در برخورد بین کینک-پادکینک‌ها امری معمول و عادی است. این بسته‌های

در رابطه با مورد ۲ باید این نکته را گوشزد کرد که کینک و پادکینک حاصله بعد از برخورد نوسانی هستند، ولی این نوسانات موقتی بوده و در گذر زمان، از طریق تابش‌های ریز کم‌دامنه، انرژی داخلی مربوط به این نوسانات کاهش می‌یابد و در نهایت این نوسانات از بین می‌روند. البته این نتیجه قابل انتظار بود زیرا سیستم سینوسی گوردون اساساً هیچ‌گونه مد غیربدیهی داخلی به‌عنوان کانالی برای جذب و نگه‌داشت انرژی ندارد. بدیهی است اگر به‌جای سیستم سینوسی گوردون از سیستم دیگری همچون سیستم ϕ^4 که چنین مد داخلی را دارد استفاده می‌کردیم، این نوسانات به‌طور دائمی در گذر زمان بقا می‌داشت.

باید توجه داشت که خروجی برخوردها به‌طور مؤثری وابسته به سرعت اولیه می‌باشد. برای مثال برای مورد مربوط به شکل ۳ اگر سرعت برخورد (اولیه) را به نصف کاهش دهیم، به‌جای پراکندگی، جذب رقم می‌خورد (همانند شکل ۲). بنابراین بدیهی است که برای هر

سرعت نور حرکت می‌کنند) یک زوج موجود با جرم سکون غیرصفر تولید کند.



شکل ۵: نمایش چگالی انرژی برخورد دو بسته تابشی که به تولید یک زوج کینک-پادکینک ختم می‌شود.

به‌عنوان یک مقایسه با نتایج پیشین، شکل ۷ مرجع [۲۷] را با شکل ۵ مقایسه می‌کنیم. به‌لحاظ ظاهری در کلیات این دو شکل مثل هم هستند ولی در جزئیات با هم تفاوت دارند. مثلاً در شکل ۷ مرجع [۲۷] دو بسته تابشی دقیقاً مشابه با یکدیگر برخورد کرده‌اند ولی در شکل ۵ دو بسته تابشی مشابه ولی با انرژی‌های متفاوت به هم برخورد کرده‌اند. اساساً نوع تابعیتی که برای معرفی بسته‌های تابشی در شکل ۵ استفاده شده است با آنچه که در شکل ۷ مرجع [۲۷] داریم متفاوت است. این‌طور به‌نظر می‌رسد که کلیت مکانیسم فرآیند خلق زوج کینک-پادکینک در برخوردهای تابشی ماهیتی مستقل از تعداد میدان‌های به‌کار گرفته شده و توابع دلخواه استفاده شده برای طراحی بسته‌های تابشی دارد.

تابشی ساختار غیر توپولوژیک ندارند و مانند کینک (پادکینک) ها توپولوژیک هستند. برای نمونه شکل ۴ که یک فریم از میدان‌ها و اندازه آنها بعد از یک برخورد خاص (حالت ۲) را به نمایش می‌گذارد به‌خوبی گویای ساختار توپولوژیکی میدان‌های ϕ_1 ، ϕ_2 و ϕ_3 برای بسته‌های تابشی بعد از برخوردها می‌باشد. سؤال مهمی که در اینجا قابل طرح است این است که آیا به‌طور عکس، برخورد بسته‌های تابشی می‌تواند به ظهور یک زوج کینک-پادکینک منتج شود؟ جواب این سؤال مثبت است و ما این مهم را به‌صورت عددی با سعی و خطا برای برخورد دو بسته تابشی توپولوژیک نشان می‌دهیم. برای این منظور توابع مختلفی را برای معرفی بسته‌های تابشی به‌کار گرفتیم که برخورد بعضی از آنها به‌ظهور یک زوج کینک-پادکینک منجر شد. به‌عنوان مثال بر مبنای تابع دلخواه

$$\psi_{a,\pm}(x, t) = \tanh(x \pm t - a),$$

که در آن a یک عدد ثابت می‌باشد، و همچنین اعمال قید ۱۹، می‌توان دو بسته تابشی منفک از هم در لحظات اولیه $t \rightarrow 0$ به‌صورت زیر تعریف نمود:

$$\phi_1 = (\pi - 0.5)\psi_{a,+} + \pi\psi_{b,-},$$

$$\phi_2 = \pi\psi_{a,-} + \pi\psi_{b,+},$$

$$\phi_3 = \sqrt{(4\pi)^2 - \phi_1^2 - \phi_2^2}, \quad 24$$

مشروط به اینکه $|b - a| \gg 1$. در عمل برای تابع $\psi_{a,\pm}$ و ترکیب دلخواه ۲۴ بی‌نهایت انتخاب دلخواه می‌توان داشت ولی لزوماً همه آنها به‌ظهور یک زوج کینک-پادکینک منجر نخواهند شد.

از خروجی برخورد زوج تابشی ۲۵ مطابق شکل ۵، یک زوج کینک به‌همراه دو بسته تابشی جدید تولید می‌شود. این پدیده چیزی مشابه تولید زوج در فیزیک است و از این جنبه جالب توجه می‌باشد. به‌بیانی دقیق‌تر، طبیعت غیرخطی حاکم بر سیستم، عاملی است که می‌تواند از دو موجود تابشی با جرم سکون صفر (که با

نتیجه گیری

نیست. برای نمونه در رابطه با سیستم غیرخطی سینوسی گوردون مجبور شدیم از واژگان فیزیکی عدم قطعیت در برخوردها، نابودی و تولید زوج، بهره بگیریم؛ واژگانی که از جنبه فیزیکی برای ما کاملاً آشنا هستند. البته به کارگیری این واژگان نمی‌بایست با آنچه از مفهوم عدم قطعیت در کوانتوم می‌شناسیم و یا نمی‌بایست با پدیده‌های تولید و نابودی زوج الکترون-پوزیترون یکسان انگاشته شود.

در انتها باید به این نکته اشاره نمود که آنچه در این مقاله به صورت عددی به دست آوردیم نتیجه بررسی یک سیستم ۳ میدانه بود. فرض ما این است که نتایج و وضعیت‌های مشابهی برای سایر سیستم‌ها با تعداد میدان‌های بالاتر برقرار باشد که البته به صورت عددی برای موارد محدودی بررسی شد ولی نتایج آنها در این مقاله گنجانده نشد. با این وجود باور داریم برای دیگر سیستم‌ها با میدان‌های بیشتر و مقایسه آنها باهم، نکات و ملاحظات نامکشوف زیادی وجود دارد که می‌تواند زمینه‌ای برای مطالعه در کارهای آینده باشد.

مرجع‌ها

- [1] T. Schneider, *Nonlinear optics in telecommunications* Springer Science & Business Media, (2013). <https://doi.org/10.1007/978-3-662-08996-5>
- [2] L.F. Mollenauer, J.P. Gordon, *Solitons in optical fibers: fundamentals and applications* Elsevier (2006). [Solitons in Optical Fibers - 1st Edition | Elsevier Shop](https://doi.org/10.1016/B978-0-12-088461-1)
- [3] A.R. Bishop, T. Schneider, *Solitons and Condensed Matter Physics* Springer Science & Business Media, (2012). <https://doi.org/10.1007/978-3-642-81291-0>
- [4] B.A. Strukov, A.P. Levanyuk, *Ferroelectric phenomena in crystals: physical foundations* (Springer Science & Business Media 2012). <https://doi.org/10.1007/978-3-642-60293-1>

برخلاف سیستم سینوسی گوردون که نتیجه برخورد جواب‌های کینک-پادکینک آن به طور قطعی مشخص است، جواب‌های کینک و پادکینک یک سیستم سینوسی گوردون چند میدانه، علی‌رغم داشتن شکل و انرژی یکسان، در برخوردها رفتارهای قطعی و مشخصی از خود بروز نمی‌دهند. این عدم قطعیت ریشه در ساختار داخلی کینک (پادکینک) ها دارد. به بیان دیگر یک کینک (پادکینک) ملغمه‌ای از چند میدان درهم‌تنیده می‌باشد که به روش‌های مختلف می‌توانند در کنار هم قرار گیرند و خروجی برخوردها تابعی از تفاوت ساختاری زوج کینک-پادکینک برخورد کننده خواهد بود. از این رو به نظر می‌رسد که (شبه) ذراتی با ظاهر ماکروسکوپی یکسان داریم ولی از درون ماهیتی متفاوت دارند. این تفاوت در ساختار داخلی از طریق مفهوم بار توپولوژیک به سادگی قابل بیان است. برای یک سیستم سینوسی گوردون n میدانه، n بار توپولوژیک مستقل Q_i وجود دارد و زمانی می‌توانیم دو کینک (پادکینک) را به لحاظ ساختار داخلی دقیقاً یکی بنامیم که این بارها با هم برابر باشند.

سیستم سینوسی گوردون چند میدانه، برخلاف نسخه ساده و تک‌میدانه آن، حاوی تنوعی از جواب‌های منفرد با جرم سکون صفر و سرعت نور در کنار کینک‌ها و پادکینک‌ها با ساختار داخلی گوناگون می‌باشد. در این مطالعه ما همه جنبه‌های مربوط به برهم‌کنش این گونه از جواب‌ها را بررسی نکردیم و باور داریم نکات و ملاحظات فراوانی در این زمینه وجود دارد که می‌تواند شروعی برای مقالات آتی باشد.

یکی از مهم‌ترین اهداف ما در نوشتن این مقاله تأکید بر این نکته است که مطالعه سیستم‌های غیرخطی به چه میزان می‌تواند ادبیات و واژگان متفاوتی را القاء کند که به طور طبیعی از مدل‌های خطی مرسوم قابل انتظار

- [15] M. Cadoni, R.De. Leo, and S. Demelio, Soliton propagation in homogeneous and inhomogeneous models for DNA torsion dynamics, *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, **18** (2011) 287-319.
<https://doi.org/10.1142/S1402925111001544>
- [16] A.A. Grinevich, A.A. Ryasik, and L.V. Yakushevich, Trajectories of DNA bubbles, **75** (2015) 62-75.
<https://doi.org/10.1016/j.chaos.2015.02.009>
- [17] L. Liu, C. Li, Coupled sine-Gordon systems in DNA dynamics. *Advances in Mathematical Physics*, **2018** (2018).
<https://doi.org/10.1155/2018/4676281>
- [18] S.V. Kryuchkov, E.L. Kukhar, Influence of the constant electric field on the mutual rectification of the electromagnetic waves in graphene superlattice, *Physica E*, **46** (2012) 25.
<https://doi.org/10.1016/j.physe.2012.08.014>
- [19] R.D. Yamaletdinov, V.A. Slipko, and Y.V. Pershin, Kinks and antikinks of buckled graphene: a testing ground for the ϕ^4 field model, *Physical Review B*, **96** (2017) 094306.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.96.094306>
- [20] F. Martin-Vergara, F. Rus, F.R. Villatoro, Numerical search for the stationary quasi breather of the graphene superlattice equation, *Chaos, Solitons and Fractals*, **162** (2022) 112530.
<https://doi.org/10.1016/j.chaos.2022.112530>
- [21] N. Riazi, A. Azizi, S.M. Zebarjad, Soliton decay in a coupled system of scalar fields, *Physical Review D* **66** (2002), 065003.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.66.065003>
- [22] D. Bazeia, R.F. Ribeiro, M.M. Santos, Topological defects inside domain walls, *Physical Review D*, **54** (1996) 1852.
<https://doi.org/10.1016/j.cam.2007.11.007>
- [5] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons* Elsevier, Amsterdam, (1982). [Solitons and Instantons, Volume 15 - 1st Edition | Elsevier Shop](#)
- [6] N. Manton, P. Sutcliffe, *Topological Solitons* Camberage University Press, (2004). [Topological solitons 1 | Theoretical physics and mathematical physics | Cambridge University Press](#)
- [7] L.V. Yakushevich, *Nonlinear physics of DNA* John Wiley & Sons (2006). [Nonlinear Physics of DNA, 2nd Edition | Wiley](#)
- [8] T.H.R. Skyrme, A non-linear field theory, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*. **260** (1961), 127-138.
<https://doi.org/10.1098/rspa.1961.0018>
- [9] G. 't Hooft, *Nuclear Physics, Magnetic monopoles in a unified gauge theories*, *Nuclear Physics B* **79** (1974), 276-284. [CM-P00060463.pdf \(cern.ch\)](#)
- [10] M.K. Prasad, *Instantons and monopoles in Yang–Mills gauge field theories*, *Physica D*, **1** (1980) 167-191.
[https://doi.org/10.1016/0167-2789\(80\)90010-X](https://doi.org/10.1016/0167-2789(80)90010-X)
- [11] M.B. Hindmarsh, T.W.B. Kibble, *Cosmic strings*, *Reports on Progress in Physics* **58** (1995) 477.
<https://doi.org/10.1088/0034-4885/58/5/001>
- [12] P.G. Drazin, R.S. Johnson, *Solitons: an Introduction*, [2nd edition Cambridge University Press](#).
- [13] M.M. El-Borai, E.L. Owaidey, H.M. Ahmed and A.H. Arnous, Soliton solutions of the nonlinear Schrodinger equation by three integration schemes, *Nonlinear Science Letter A*, **8** (2017) 32-40.
- [14] A.H. Khater, R.S. Temsah, and M.A. Hassan, Chebyshev spectral collocation method for solving Burgers'-type equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **222** (2008) 333.
<https://doi.org/10.1016/j.cam.2007.11.007>

nonlinear complex sine-Gordon system, Progress of Theoretical and Experimental Physics, **165** (2014) 112834. <https://doi.org/10.1093/ptep/ptu002>

[26] M. Mohammadi, A.R. Olamaei, Soliton-like Solutions of the Complex Non-linear Klein-Gordon Systems in 1 + 1 Dimensions, Iranian Journal of Astronomy and Astrophysics, **1** (2017) 57-68. <https://doi.org/10.22128/IJAA.2017.108>

[27] M. Mohammadi, Soliton-like solutions of complex ϕ^4 system in 1+1 dimension spacetime, Journal of Research on Many-body Systems, **8** (2018) 159-169. [In Persian] <https://doi.org/10.22055/JRMBS.2018.13957>

<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.66.065003>

[23] D. Bazeia, J.R.S. Nascimento, R.F. Ribeiro, and D. Toledo, Soliton stability in systems of two real scalar fields, Journal of Physics A, **30** (1997) 157. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/30/23/015>

[24] M. Mohammadi, N. Riazi, The affective factors on the uncertainty in the collisions of the soliton solutions of the double field sine-Gordon system, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, **72** (2019) 176-193. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.12.014>

[25] M. Mohammadi, N. Riazi, Bi-dimensional soliton-like solutions of the