Document Type: Full length research Paper
Pages: 54-65

The isocharge phase transition signature in quasi-normal modes of charged anti-de Sitter black holes

Farkhondeh Roshan Bakhsh[1], Mahdi Kord Zangeneh*[1,2], Davood Afshar[1,2]

[1]Department of Physics, Faculty of Science, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran
[2]Center for Research on Laser and Plasma, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Received: 25.06.2024 Final revised: 19.09.2024 Accepted: 23.09.2024

Doi: 10.22055/jrmbs.2024.19702

Abstract

In this paper, we aim to investigate the relationship between the thermodynamic phase of a charged anti-de Sitter black hole and the dynamic behavior of scalar perturbations around it. To achieve this goal, we first examine the thermodynamics of the charged anti-de Sitter black hole and analyze the isocharge phase transition between small and large black holes. Next, by considering a scalar field within the background of black hole, we solve the Klein-Gordon equation using the shooting method to determine the frequency of quasi-normal modes. Finally, we compare the behavior of the frequency of quasi-normal modes in the small and large black hole phases, demonstrating the distinct slope of the imaginary part versus the real part curve in these phases. This suggests that the thermodynamic phase and phase transition of the black hole can be identified through the dynamic properties of scalar perturbations around it.

Keywords: Anti-de Sitter black holes, Isocharge phase transition, Real scalar field, Shooting method, Quasi-normal mode

* Corresponding Author: mkzangeneh@scu.ac.ir

اثر گذار فاز هم‌بار بر مُدهای شبه‌نرمالِ سیاه‌چاله‌های باردار پاددوسیته

فرخنده روشن بخش[۱]، مهدی کردزنگنه[۱،۲]*، داود افشار[۱،۲]

[۱]گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

[۲]مرکز تحقیقات لیزر و پلاسما، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

دریافت: ۱۴۰۳/۰۴/۰۵ ویرایش نهائی: ۱۴۰۳/۰۶/۲۹ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۷/۰۲

Doi: 10.22055/jrmbs.2024.19702

چکیده

در این مقاله قصد داریم ارتباط بین فاز ترمودینامیکی سیاه‌چالهٔ باردار پاددوسیته و رفتار دینامیکی اختلال نرده‌ای اطراف آن را مورد مطالعه قرار دهیم. بدین منظور، ابتدا با بررسی ترمودینامیک سیاه‌چالهٔ باردار پاددوسیته، گذار فاز هم‌بار بین فاز سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ را بررسی خواهیم نمود. سپس، با در نظر گرفتن یک میدان نرده‌ای در پس‌زمینهٔ سیاه‌چاله، به‌حل معادلهٔ کلاین–گوردون با استفاده از روش عددی پرتابی پرداخته و بسامد مدهای شبه‌نرمال را به‌دست می‌آوریم. در نهایت، با مقایسهٔ رفتار بسامد مدها در فازهای سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ، نشان می‌دهیم که شیب نمودار قسمت موهومی برحسب قسمت حقیقی بسامدها در این فازها متفاوت است. بنابراین، فاز و گذار فاز ترمودینامیکی سیاه‌چاله را می‌توان از طریق رفتار دینامیکی اختلالات نرده‌ای اطراف آن معین نمود.

کلیدواژگان: سیاه چالهٔ باردار پاددوسیته، گذار فاز هم‌بار، میدان نرده‌ای حقیقی، روش پرتابی، مد شبه‌نرمال

مقدمه

یکی از مورد توجه‌ترین شاخه‌های مطالعاتی در نسبیت عام، بررسی ارتباط گرانش و ترمودینامیک و به‌تبع آن، مطالعهٔ سیاه‌چاله‌ها به‌عنوان سامانه‌های ترمودینامیکی است. در نیمهٔ اول دههٔ ۱۹۷۰، با کارهای هاوکینگ، بکنشتاین و دیگر فیزیک‌دانان، آنتروپی، دما و چهار قانون ترمودینامیک برای سیاه‌چاله‌ها ارائه شد [۱–۴]. در ادامه، گذار فازهای مشابه با گذار فازهای ترمودینامیکی برای سیاه‌چاله‌ها مورد مطالعه قرار گرفت. هاوکینگ و پیج نشان دادند که یک گذار فاز مرتبهٔ اول بین تابش گرمایی و سیاه‌چالهٔ پاددوسیته وجود دارد [۵]. این گذار فاز توسط ویتن به یک گذار فاز در پلاسمای کوارک–گلوئون مرتبط شد [۶]. مطالعات بعدی نشان داد که مشابه با گذار فاز واندروالس گاز–مایع، سیاه‌چالهٔ پاددوسیتهٔ باردار، گذار فاز مرتبهٔ اول هم‌فشار و هم‌دما را بین سیاه‌چاله‌های بزرگ و کوچک در فضای فاز ترمودینامیکی توسعه‌یافته تجربه می‌کند [۷–۱۰]. در فضای فاز توسعه‌یافته، ثابت کیهان‌شناسیِ متغیر به‌عنوان فشار در نظر گرفته می‌شود، در حالی که کمیت مزدوج آن، حجم سامانه است.

در رویکرد فضای فاز توسعه‌یافته، با تعریف فشار برای سیاه‌چاله لازم است تا ثابت کیهان‌شناسی، که یک کمیت مربوط به فضا است و با سیاه‌چاله ارتباط ندارد را به فشار سیاه‌چاله مرتبط کرد و از این طریق فضای فاز را توسعه داد. از دیدگاهی متفاوت، می‌توان ثابت کیهان‌شناسی را بدون تغییر نگه داشت و بار را متغیر در نظر گرفت [۱۱]. در این رویکرد، ثابت کیهان‌شناسی

* نویسنده مسئول: mkzangeneh@scu.ac.ir

به‌عنوان یک کمیت ترمودینامیکی متغیر و مؤثر در رخ دادن گذار فاز در نظر گرفته نمی‌شود و فرآیند ترمودینامیکی در فضای فازی رخ می‌دهد که در آن سیاه‌چاله در یک هندسهٔ پس‌زمینهٔ پاد–دوسیتهٔ ثابت تحول می‌یابد. این فضای فاز می‌تواند جایگزین فضای فاز توسعه‌یافته باشد. علاوه بر این، در نظر گرفتن بار سیاه‌چاله به‌عنوان متغیر، طبیعی بوده و استفاده از این دیدگاهِ جایگزین، برای توصیف گذار فاز و رفتار بحرانی، سبب می‌شود تا تابع پاسخ مربوطه پایداری و ناپایداری سامانه را به‌درستی معین کند [۱۱]. با استفاده از این رویکرد، گذار فاز هم‌بار سیاه‌چالهٔ باردار پاددوسیتهٔ بورن–اینفلد مطالعه و بروز گذار فاز بازگشتی نشان داده شده است [۱۲].

برخی سامانه‌های فیزیکی دارای مُدهای نوسانی منحصر به‌فرد می‌باشند. برای سامانه‌های غیراتلافی، این مدها حقیقی بوده و تحت عنوان مدهای نرمال شناخته می‌شوند. سیاه‌چاله‌ها به‌دلیل تابشی که دارند، سامانه‌های اتلافی محسوب می‌شوند. از این‌رو، برای توصیف دینامیکی آنها از مدهای مختلط که از دست رفتن انرژی را نشان می‌دهند، استفاده می‌شود [۱۳,۱۴]. به‌چنین مدهای مختلطی، مدهای شبه‌نرمال گفته می‌شود. با مطالعهٔ مدهای شبه‌نرمالِ سیاه‌چاله‌ها می‌توان اطلاعات مفیدی از جمله در مورد پایداری دینامیکی آنها به‌دست آورد [۱۹–۱۵]. همچنین، اثر گذار فاز سیاه‌چاله‌های کوچک–بزرگ پاددوسیتهٔ باردار در فضای فاز توسعه‌یافته بر مدهای شبه‌نرمال مطالعه شده است [۲۰]. اخیراً، ارتباط رفتار مدهای شبه‌نرمال و گذار فاز ترمودینامیکی سیاه‌چاله‌های مودار در چارچوب گرانش اینشتین–ماکسول–اسکالر [۲۱] و سیاه‌چاله‌های پاددوسیتهٔ عادی در کلاس‌های باردین و هایوارد [۲۲] نیز مورد بررسی قرار گرفته است.

در مقالهٔ حاضر، ما قصد داریم پس از مطالعهٔ گذار فاز هم‌بار سیاه‌چاله‌های پاددوسیتهٔ باردار، به‌بررسی ارتباط گذار فاز و رفتار مُدهای شبه‌نرمال بپردازیم. ما نشان خواهیم داد که در رویکرد جایگزین فضای فاز توسعه‌یافته نیز، رفتار مدهای شبه‌نرمال می‌تواند منعکس‌کنندهٔ فاز و گذار فاز ترمودینامیکی سیاه‌چاله باشد. این به‌نوبهٔ خود تأکید مجددی بر ارتباط نزدیک بین رفتار دینامیکی و ترمودینامیکی سیاه‌چاله‌ها نیز می‌باشد.

سیاه‌چالهٔ پاددوسیتهٔ باردار

جواب خلأ معادلهٔ اینشتین در حضور ثابت کیهان‌شناسیِ منفی Λ، سیاه‌چالهٔ پاددوسیته را می‌دهد. در این بخش، ویژگی‌های ترمودینامیکی سیاه‌چاله‌های پاددوسیتهٔ باردار چهار بُعدی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

متریک سیاه‌چالهٔ پاددوسیته در چهار بُعد با رابطهٔ کلی

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2 \ , \qquad ۱$$

داده می‌شود که در آن $d\Omega^2$ عنصر خط کرهٔ دو بعدی و تابع $f(r)$، تابع متریک سیاه‌چاله،

$$f(r) = 1 - \frac{m}{r} + \frac{q^2}{r^2} + \frac{r^2}{l^2} \ , \qquad ۲$$

می‌باشد. در رابطهٔ فوق، l شعاع فضای پاددوسیته بوده و با ثابت کیهان‌شناسی به‌شکل $l^2 = -\frac{3}{\Lambda}$ ارتباط دارد. با توجه به صفر شدن تابع متریک در افق رویداد r_H، $f(r_H) = 0$، می‌توان پارامتر m را به‌دست آورد:

$$m = r_H + \frac{q^2}{r_H} + \frac{r_H^3}{l^2} \ . \qquad ۳$$

رابطهٔ پارامترهای m و q با جرم و بار کل سیاه‌چاله به‌صورت

$$Q = \frac{q}{4\pi} \ , \qquad ۴$$

$$M = \frac{m}{8\pi} = \frac{r_H}{8\pi} + \frac{q^2}{8\pi r_H} + \frac{r_H^3}{8\pi l^2} \ , \qquad ۵$$

داده می‌شود. روابط فوق با استفاده از قانون گاؤس برای سیاه‌چاله‌ها و رابطهٔ جرم ADM به‌دست می‌آیند [۲۵-۲۳].

فشار ترمودینامیکی سیاه‌چاله در فضای پاددوسیتهٔ چهاربُعدی به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۸,۲۶]:

$$P = -\frac{\Lambda}{8\pi} = \frac{3}{8\pi l^2}\,. \qquad ۶$$

همچنین دمای سیاه‌چاله با رابطهٔ $T = \frac{\kappa}{2\pi}$ داده می‌شود [۴] که در آن κ گرانش سطحی سیاه‌چاله است. بدین ترتیب، دمای سیاه‌چاله

$$T = \frac{f'(r_H)}{4\pi} = -\frac{4\pi Q^2}{r_H^3} + \frac{1}{4\pi r_H} + \frac{3r_H}{4\pi l^2}\,, \qquad ۷$$

خواهد بود. در رابطهٔ بالا، پرایم به‌معنی مشتق‌گیری نسبت به شعاع r است. آنتروپی سیاه‌چاله به‌ازای واحد سطح نیز عبارت خواهد بود از

$$S = \frac{r_H^2}{4}\,. \qquad ۸$$

یافتن ارتباط فیزیک سیاه‌چاله‌ها و قوانین ترمودینامیک، از دست آوردهای مهم فیزیک نظری است. این موضوع از آن جهت حائز اهمیت است که می‌تواند امکان وجود سیاه‌چاله را از منظر پایداری ترمودینامیکی نیز نشان دهد. در این چارچوب می‌توان پدیده‌های ترمودینامیکی مرتبط با سیاه‌چاله‌ها از جمله گذار فاز را بررسی نمود.

گذار فاز ترمودینامیکی

همان‌طور که پیش از این اشاره شد، اخیراً رویکرد جدیدی در مطالعهٔ گذار فاز سیاه‌چاله معرفی شده است که در آن بار سیاه‌چاله، به‌عنوان یک کمیت ترمودینامیکی متغیر، نقش اصلی را ایفا می‌کند. فضای فاز معرفی شده در این رویکرد، جایگزین فضای فاز توسعه‌یافته که در آن فشار/ثابت کیهان‌شناسی متغیر است، می‌شود. در این بخش قصد داریم تا گذار فاز سیاه‌چاله‌های پاددوسیتهٔ باردار را با این رویکرد جدید مورد بررسی قرار دهیم.

در این حالت، قانون اول ترمودینامیک به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

ک
$$dM = TdS + \Phi dQ\,, \qquad ۹$$

در آن، Φ پتانسیل الکتریکی است. همچنین، برای تعیین نقطهٔ بحرانی، می‌بایست شعاع افق و بار سیاه‌چاله را در این نقطه محاسبه کنیم. بدین منظور، با استفاده از معادلهٔ حالت۷ و شرط‌های

$$\frac{\partial T}{\partial r_H} = 0\,, \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial r_H^2} = 0\,, \qquad ۱۰$$

در نقطهٔ بحرانی، این کمیت‌ها را محاسبه خواهیم کرد. شرط‌های ۱۰ در نقطهٔ بحرانی، به‌معادلات

$$\frac{3}{4\pi l^2} + \frac{12\pi Q^2}{r_H^4} - \frac{1}{4\pi r_H^2} = 0\,, \qquad ۱۱$$

$$-\frac{48\pi Q^2}{r_H^5} + \frac{1}{2\pi r_H^3} = 0\,, \qquad ۱۲$$

منجر می‌شوند. با استفاده از معادلات فوق، شعاع افق و بار سیاه‌چالهٔ متناظر با نقطهٔ بحرانی به‌شکل زیر به‌دست می‌آیند:

$$Q_c = \frac{l}{24\pi}\,, \quad r_{Hc} = \frac{l}{\sqrt{6}}\,. \qquad ۱۳$$

با استفاده از این مقادیر، دمای بحرانی T_c نیز به‌صورت زیر خواهد بود:

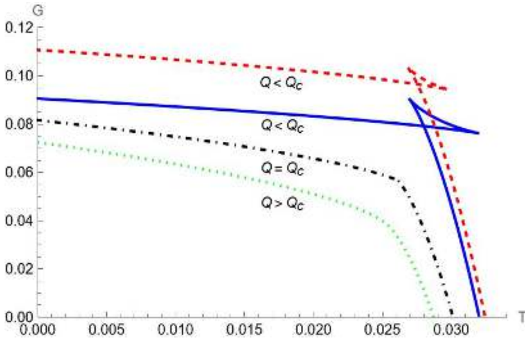
$$T_c = \frac{1}{\pi l}\sqrt{\frac{2}{3}}\,. \qquad ۱۴$$

انرژی آزاد گیبس در مطالعهٔ گذار فاز نقش اساسی دارد. این کمیت می‌تواند رخداد و مرتبهٔ گذار فاز را تعیین کند. ناپیوستگی در نمودار انرژی آزاد گیبس برحسب دما، معادل گذار فاز مرتبهٔ صفرم و در مشتق مرتبهٔ اول آن معادل گذار فاز مرتبهٔ اول می‌باشد. برای مشتقات مراتب بالاترِ انرژی آزاد گیبس نیز به‌همین صورت خواهد بود. انرژی آزاد گیبس $G = M - TS$ را با جای‌گذاری از روابط۵، ۷ و ۸ می‌توان محاسبه نمود:

$$G = \frac{3\pi Q^2}{r_H} + \frac{r_H}{16\pi} - \frac{r_H^3}{16\pi l^2}. \qquad ۱۵$$

با توجه به‌اینکه در این حالت، بار را به‌عنوان یک متغیر در نظر گرفته‌ایم، در اینجا انرژی آزاد گیبس تابع بار و دما، $G(T,Q)$ است. از اینجا به بعد در محاسبات به‌طور دلخواه $l = 10$ در نظر گرفته شده است. در نتیجه با توجه به‌رابطهٔ۱۳، بار بحرانی $Q_c \approx 0.13$ خواهد بود.

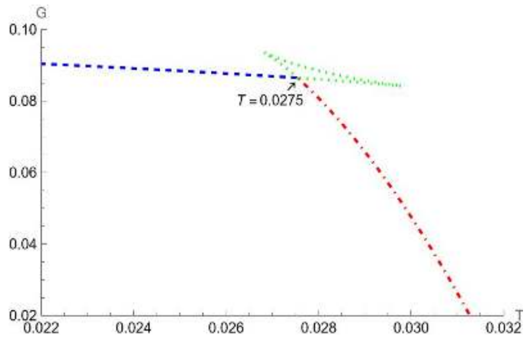
در شکل۱، نمودار انرژی آزاد گیبس برحسب دما به‌ازاء مقادیر مختلف بار (کمتر، بیشتر و مساوی بار بحرانی) رسم شده است. سامانه همواره حالتی را انتخاب می‌کند که کم‌ترین انرژی آزاد گیبس را داشته باشد. از همین رو، برای بار کمتر از بار بحرانی $Q < Qc$، یک گذار فاز مرتبهٔ اول بین سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ رخ می‌دهد. در نقطهٔ گذار فاز، سیستم برای اینکه کم‌ترین مقدار انرژی آزاد را انتخاب کند، از یک فاز به فاز دیگر گذار می‌کند. این گذار فاز، مشابه با گذار فاز مرتبهٔ اول مایع-گاز در شارهٔ واندروالس است. همچنین، به‌ازای بار بحرانی $Q = Q_c$، یک گذار فاز مرتبهٔ دوم رخ می‌دهد. نقطهٔ بحرانی، آخرین نقطه‌ای است که در آن امکان وقوع گذار فاز وجود دارد. به‌عبارت دیگر، به‌ازای بارهای بزرگ‌تر از بار بحرانی، همان‌طور که در شکل۱ نشان داده شده است، گذار فازی رخ نمی‌دهد.



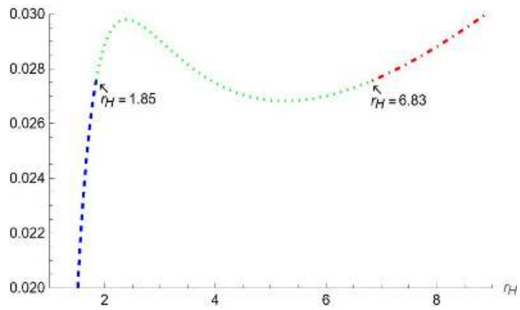
شکل۱. نمودار انرژی آزاد گیبس برحسب دما به‌ازاء بارهای مختلف. نمودارهای قرمز (خط‌چین) و آبی (خط ممتد) به‌ترتیب مربوط به‌مقادیر بار $Q = 0.10$ و $Q = 0.09$ (کمتر از بار بحرانی) بوده و نمودار سبز (نقطه‌چین) مربوط به بار $Q = 0.15$ (بزرگ‌تر از بار بحرانی) است. نمودار سیاه (خط-نقطه‌چین) مربوط به بار بحرانی است. نمودارها به منظور واضح‌تر شدن تصویر، در راستای محور عمودی کمی جابه‌جا شده‌اند.

در ادامه، گذار فاز مرتبهٔ اول بین سیاهچاله‌های کوچک و بزرگ را به‌طور دقیق‌تر بررسی می‌کنیم. در نمودار شکل۲، ناحیهٔ آبی رنگ (خط‌چین)، سیاه‌چاله‌های کوچک و ناحیهٔ قرمز رنگ (خط-نقطه‌چین)، سیاه‌چاله‌های بزرگ را نشان می‌دهد. در محل تلاقی این دو ناحیه، در دمای $T = 0.0275$، گذار فاز بین سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ رخ می‌دهد. برای واضح‌تر شدن موضوع، در شکل۳، نمودار دما برحسب شعاع افق رویداد، متناظر با نمودار شکل۲، رسم شده است.

همان‌طور که در شکل۳ به‌وضوح دیده می‌شود، ناحیهٔ آبی رنگ (خط‌چین) مربوط شعاع‌های افق رویداد کوچک و ناحیهٔ قرمز رنگ (خط-نقطه‌چین) مربوط به شعاع‌های افق رویداد بزرگ است که در نقطهٔ گذار، تغییر فاز بین آنها رخ می‌دهد.



شکل۲. نمودار انرژی آزاد گیبس برحسب دما برای بار Q=0.10.

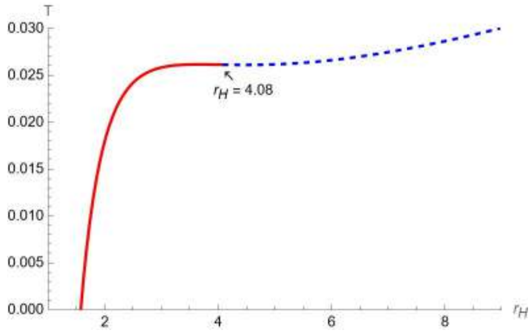


شکل۳. نمودار دما برحسب شعاع افق رویداد متناظر با نمودار شکل۲.

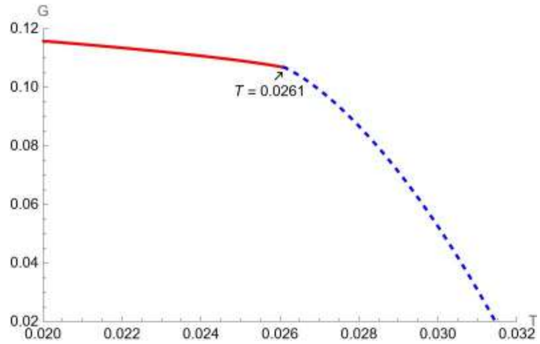
در نمودار دما برحسب شعاع افق رویداد (شکل۳)، شیب نمودار نشان‌دهندهٔ تغییرات دما نسبت به افق رویداد در بار ثابت، $\left(\frac{\partial T}{\partial r_H}\right)_Q$ است. از طرف دیگر، ظرفیت گرمایی با تغییرات آنتروپی نسبت به دما متناسب بوده ($C_Q = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_Q$) و آنتروپی نیز با سطح افق رویداد متناسب است، در نتیجه:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_Q \propto \left(\frac{\partial r_H}{\partial T}\right)_Q = \left(\frac{\partial T}{\partial r_H}\right)_Q^{-1} . \qquad ۱۶$$

بنابراین علامت شیب نمودار $T - r_H$، مثبت یا منفی بودن ظرفیت گرمایی را تعیین می‌کند (دقت کنید که دما مثبت است). با توجه به توضیحات فوق، در فازهای سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ (نواحی آبی و قرمز) از آنجایی که شیب نمودار $T - r_H$ مثبت است (شکل۳)، ظرفیت گرمایی مثبت بوده و سامانه از نظر گرمایی پایدار است.



شکل۴. نمودار انرژی آزاد گیبس برحسب دما برای سیاه‌چالهٔ پاددوسیتهٔ باردار به‌ازاء بار بحرانی $Q = Q_c \approx 0.13$.



شکل۵. نمودار دما برحسب شعاع افق رویداد متناظر با شکل۴.

در شکل۴ نمودار انرژی آزاد گیبس برحسب دما برای نقطهٔ بحرانی رسم شده است. در این حالت، ناحیهٔ قرمز رنگ (خط ممتد) نمودار، فاز سیاه‌چاله‌های کوچک و ناحیهٔ آبی رنگ (خط‌چین) نمودار، فاز سیاه‌چاله‌های بزرگ را نشان می‌دهد.

نمودار دما برحسب شعاع افق رویداد متناظر با شکل۴ نیز در شکل۵ رسم شده است.

همان‌طور که از شکل۵ مشخص است، در محل گذار فاز، شیب نمودار $T - r_H$ صفر شده و در نتیجه، با توجه به رابطهٔ۱۶، ظرفیت گرمایی در این نقطه، واگرا می‌شود. این بدان معناست که در این نقطه، واگرایی در مشتق مرتبهٔ دوم انرژی آزاد گیبس برحسب دما وجود دارد (دقت کنید $S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_Q$). در نتیجه، در نقطهٔ بحرانی، یک گذار فاز مرتبهٔ دوم بین سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ خواهیم داشت. علاوه بر این، با توجه به مثبت بودن شیب نمودار دما برحسب شعاع افق رویداد در فازهای سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ

(شکل۵)، سامانه در هر دو فاز از نظر گرمایی پایدار است.

مدهای شبه‌نرمال نرده‌ای

در این بخش ابتدا یک اختلال نرده‌ای حول سیاه‌چالهٔ باردار پاددوسیته در نظر می‌گیریم. سپس مدهای شبه‌نرمال مربوطه را به‌صورت عددی با استفاده از روش پرتابی به‌دست می‌آوریم.

برای اختلال نرده‌ای اطراف سیاه‌چاله، تابع موجی به‌صورت:

$$\phi(r,t) = \psi(r)e^{-i\omega t}\,, \qquad ۱۷$$

در نظر می‌گیریم. معادلهٔ کلاین–گوردون حاکم بر یک میدان نرده‌ای حقیقی با جرم صفر به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}\phi = 0\,. \qquad ۱۸$$

با استفاده از روابط ۱۷ و ۱۸ و در نظر گرفتن متریک سیاه‌چاله در فضا–زمان چهاربعدی که در رابطهٔ۱ داده شده است، بخش شعاعی معادلهٔ کلاین–گوردون پس از اعمال جداسازی متغیرها به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

۱۹

$$\psi''(r) + \left[\frac{f'(r)}{f(r)} + \frac{2}{r}\right]\psi'(r) + \frac{\omega^2\psi(r)}{f(r)^2} = 0\,.$$

برای حل این معادلهٔ دیفرانسیل باید شرایط مرزی را اعمال کنیم. دو شرط مرزی یکی در بی‌نهایت و دیگری در افق رویداد سیاه‌چاله خواهیم داشت. در بی‌نهایت تابع موج $\psi(r) \to 0$ می‌رود، چرا که می‌بایست جایگزیده باشد. در افق رویداد $r = r_H$، با توجه به‌اینکه $f(r_H) = 0$ است، معادلهٔ۱۹ به‌شکل زیر تقلیل می‌یابد:

$$\psi'' + \frac{f'}{f}\psi' + \frac{\omega^2}{f^2}\psi = 0 \qquad ۲۰$$

که جواب آن به‌صورت $\psi(r) = e^{-i\int\frac{\omega}{f(r)}dr}$ خواهد بود. با باز تعریف $\psi(r)$ به‌صورت $\psi(r)e^{-i\int\frac{\omega}{f(r)}dr}$، معادلهٔ۱۹ به‌شکل زیر در می‌آید:

$$\psi'' + \psi'\left[\frac{f'}{f} - \frac{2i\omega}{f} + \frac{2}{r}\right] - \psi\frac{2i\omega}{rf} = 0. \qquad ۲۱$$

که شرط مرزی آن در افق رویداد، $\psi(r_H) = 1$ خواهد بود. با قرار دادن تابع متریک $f(r)$ در رابطهٔ۲۱ و جایگزین نمودن پارامترها، می‌توان بسامد مدهای شبه‌نرمال را با استفاده از روش پرتابی به‌دست آورد.

تابعیت زمانی تابع موج ϕ به‌صورت $e^{-i\omega t}$ می‌باشد. از آن‌جایی‌که بسامد مدهای شبه‌نرمال، مختلط است، $\omega = \omega_R + i\omega_I$، داریم:

$$e^{-i\omega t} = e^{-i(\omega_R + i\omega_I)t} = e^{-i\omega_R t}e^{\omega_I t} \qquad ۲۲$$

در رابطهٔ فوق، قسمت حقیقی بسامد، ω_R، با انرژی ذرات متناسب است. از طرفی، علامت بخش موهومی بسامد، ω_I، تعیین کنندهٔ پایداری/ناپایداری دینامیکی سیاه‌چاله است، به‌طوری‌که اگر $\omega_I < 0$ باشد، تابع موج دارای میرایی نمایی بوده و پایدار است و اگر $\omega_I > 0$ باشد، تابع موج دارای رشد نمایی بوده و سیاه‌چاله از نظر دینامیکی ناپایدار است.

رفتار بسامد مدها و فاز سیاه‌چاله

در شکل۳، نمودار دما برحسب شعاع افق رویداد برای سیاه‌چاله‌ای که گذار فاز مرتبهٔ اول بین فاز سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ را تجربه می‌کند رسم شده و محدودهٔ فازها مشخص شده است.

در جدول۱، بسامدهای مدهای شبه‌نرمال اختلال نرده‌ای اطراف سیاه‌چاله در فازهای سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ که از حل عددی معادلهٔ کلاین–گوردون به‌روش پرتابی محاسبه شده‌اند، آورده شده است. بسامدهای بالای خط افقی مربوط به فاز سیاه‌چاله‌های کوچک و پایین خط افقی مربوط به فاز سیاه‌چاله‌های بزرگ می‌باشند.

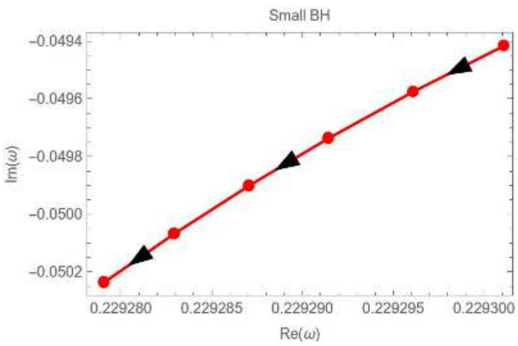
جدول۱. بسامد مدهای شبه‌نرمال برای فازهای سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ با بار $Q = 0.10 < Q_c$

r_H	T	ω
1.79	0.0268	0.2293064743 - 0.04925930644 *i*
1.80	0.0269	0.2293011071 - 0.04941607506 *i*
1.81	0.0270	0.2292961062 - 0.04957530461 *i*
1.82	0.0272	0.2292914357 - 0.04973696420 *i*
1.83	0.0273	0.2292870617 - 0.04990102143 *i*
1.84	0.0274	0.2292829522 - 0.05006744235 *i*
6.84	0.027570	0.2475912666 - 0.1824697781 *i*
6.85	0.027579	0.2476816743 - 0.1827389314 *i*
6.86	0.027588	0.2477722914 - 0.1830080754 *i*
6.87	0.027596	0.2478631176 - 0.1832772099 *i*
6.88	0.02760	0.2479541531 - 0.1835463353 *i*
6.89	0.02761	0.2480453978 - 0.1838154520 *i*

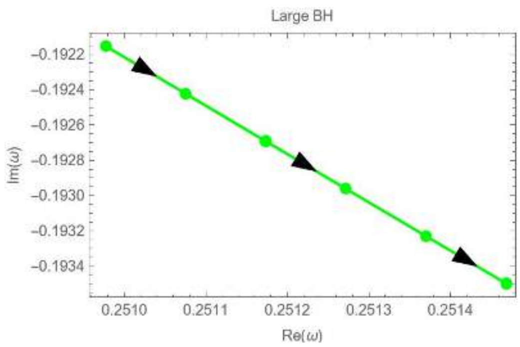
جدول فوق، برای فاز سیاه‌چاله‌های کوچک، نشان می‌دهد که با افزایش شعاع افق رویداد سیاه‌چاله، قسمت حقیقی بسامدها کاهش یافته و قدرمطلق قسمت موهومی بسامدها افزایش پیدا می‌کند. همچنین، برای فاز سیاه‌چاله‌های بزرگ، نشان می‌دهد که با بزرگ شدن شعاع افق رویداد، قسمت حقیقی و قدر مطلق قسمت موهومی بسامدها افزایش پیدا می‌کنند. این بدین معناست که در سیاه‌چاله‌های کوچک/بزرگ، زمانی‌که اندازهٔ سیاه‌چاله افزایش می‌یابد، انرژی اختلالات نرده‌ای کمتر/بیشتر می‌شود. نظر به‌اینکه علامت قسمت موهومی بسامدها منفی است، اختلال، میرا و سیاه‌چاله‌ها تحت آن از نظر دینامیکی پایدار هستند. با افزایش اندازهٔ/دمای سیاه‌چاله‌های بزرگ و کوچک، قدر مطلق قسمت موهومی بسامد افزایش یافته و در نتیجه میرایی اختلالات با سرعت بیشتری رخ می‌دهد.

با توجه به‌اینکه مدهای شبه‌نرمال، صداهای مشخصهٔ سیاه‌چاله هستند [۱۵]، انتظار می‌رود که گذار فاز سیاه‌چاله در رفتار بسامد این مدها منعکس شود. قسمت موهومی، $\mathrm{Im}(\omega)$، برحسب قسمت حقیقیِ، $\mathrm{Re}(\omega)$، بسامد مدهای شبه‌نرمال برای فاز سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ در شکل‌های۶ و ۷، رسم شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود، این نمودارها دارای شیب‌های متفاوتی هستند. این نشان می‌دهد که رفتار بسامد مدها برای فازهای سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ متفاوت بوده و منعکس‌کنندهٔ فاز ترمودینامیکی سیاه‌چاله در رفتار دینامیکی اختلالات نرده‌ای اطراف آن است.

در جدول۲، بسامدهای مدهای شبه‌نرمالِ اختلالات نرده‌ای در اطراف سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ که برای حالت بحرانی $Q = Q_c \approx 0.13$ محاسبه شده‌اند، آورده شده است. بسامدهای بالای خط افقی



شکل۶. رفتار بسامد مدهای شبه‌نرمال برای سیاه‌چاله‌های کوچک. پیکان‌ها نشان‌دهندهٔ جهت افزایش اندازهٔ سیاه‌چاله هستند.



شکل۷. رفتار بسامد مدهای شبه‌نرمال برای سیاه‌چاله‌های بزرگ. پیکان‌ها نشان‌دهندهٔ جهت افزایش اندازهٔ سیاه‌چاله هستند.

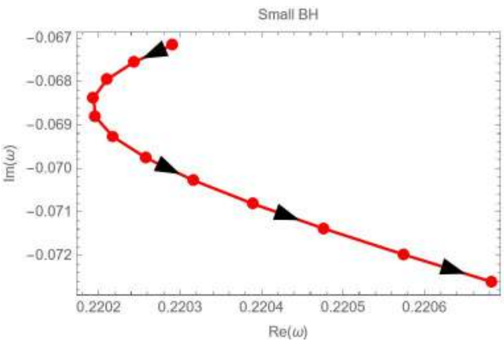
مربوط به سیاه‌چاله‌های کوچک و پایین خط افقی مربوط به سیاه‌چاله‌های بزرگ می‌باشند.

جدول۲. بسامد مدهای شبه‌نرمال برای فازهای سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ در نقطهٔ بحرانی.

r_H	T	ω
1.99	0.01779	0.2202905177 - 0.06716516413 i
2.03	0.01866	0.2202436910 - 0.06755345786 i
2.07	0.01944	0.2202102160 - 0.06795610245 i
2.11	0.02014	0.2201936826 - 0.06837546814 i
2.15	0.02077	0.2201960825 - 0.06881449073 i
2.19	0.02134	0.2202179155 - 0.06927607435 i
2.23	0.02186	0.2202585229 - 0.06976266873 i
2.27	0.02231	0.2203164622 - 0.07027605737 i
2.31	0.02273	0.2203898771 - 0.07081731788 i
2.35	0.02310	0.2204766939 - 0.07138685861 i
2.47	0.02402	0.2207686346 - 0.07309645065 i
2.51	0.02426	0.2209200427 - 0.07393963150 i
2.55	0.02448	0.2210470021 - 0.07464180630 i
6.40	0.02690	0.2421995565 - 0.1718518014 i
6.43	0.02692	0.2424605849 - 0.1726479644 i
6.46	0.02695	0.2427233289 - 0.1734441387 i
6.49	0.02697	0.2429877908 - 0.1742403275 i
6.52	0.0270	0.2432539731 - 0.1750365339 i
6.55	0.02703	0.2435218781 - 0.1758327615 i
6.58	0.02705	0.2437915081 - 0.1766290137 i
6.61	0.02708	0.2440628655 - 0.1774252943 i
6.64	0.02711	0.2443359527 - 0.1782216075 i
6.66	0.02712	0.2445189719 - 0.1787525036 i
6.67	0.02713	0.2446107708 - 0.1790179577 i
6.69	0.02715	0.2447949466 - 0.1795488795 i

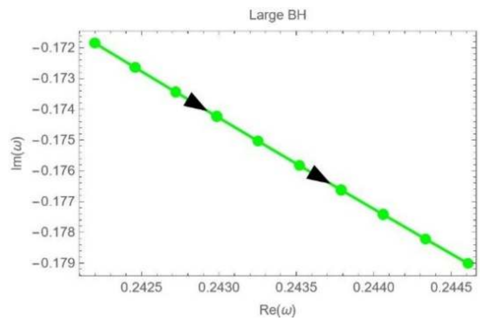
جدول۲، برای فاز سیاهچاله‌های کوچک، نشان می‌دهد که با افزایش شعاع افق رویداد سیاه‌چاله، ابتدا قسمت حقیقی بسامدها کاهش یافته و سپس افزایش می‌یابد. همچنین قدر مطلق قسمت موهومی بسامدها با افزایش شعاع افق رویداد افزایش می‌یابد. برای فاز سیاه‌چاله‌های بزرگ مشاهده می‌کنیم که با بزرگ شدن شعاع افق رویداد، قسمت حقیقی و قدر مطلق قسمت موهومی بسامدها افزایش پیدا می‌کند. منفی بودن علامت قسمت موهومی بسامد، نشان‌دهندهٔ پایداری دینامیکی سیاه‌چاله تحت اختلالات نرده‌ای است. همچنین، در فاز سیاه‌چاله‌های بزرگ با افزایش اندازه/دما، انرژی اختلالات نرده‌ای اطراف سیاه‌چاله نیز افزایش می‌یابد. به‌علاوه، با افزایش اندازهٔ/دمای سیاه‌چاله‌های بزرگ، قدر مطلق قسمت موهومی بسامد افزایش یافته و در نتیجه میرایی اختلالات با سرعت بیشتری رخ می‌دهد. از سوی دیگر، در سیاه‌چاله‌های کوچک، با افزایش اندازه/دما، انرژی اختلالات نرده‌ای در اطراف سیاه‌چاله ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. همچنین، با افزایش اندازهٔ/دمای سیاه‌چاله‌های کوچک، قدر مطلق قسمت موهومی بسامدها افزایش یافته و میرایی اختلالات با سرعت بیشتری رخ می‌دهد.

اکنون نمودار بخش موهومی $\mathrm{Im}(\omega)$ برحسب بخش حقیقی $\mathrm{Re}(\omega)$ بسامد مدهای شبه‌نرمال برای فازهای سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ در حالت بحرانی را در شکل‌های۸ و ۹ بررسی می‌کنیم. شکل‌های۸ و ۹ نشان می‌دهند که رفتار بسامد مدها برای فاز سیاه‌چاله‌های کوچک، برای نقاط دور از نقطهٔ گذار فاز، با رفتار بسامد مدها در فاز سیاه‌چاله‌های بزرگ متفاوت است.



شکل۸ رفتار بسامد مدهای شبه‌نرمال برای سیاه‌چاله‌های کوچک در حالت بحرانی. پیکان‌ها نشان‌دهندهٔ جهت افزایش اندازهٔ سیاه‌چاله هستند.

بنابراین، برای گذار فاز مرتبهٔ دوم در نقطهٔ بحرانی نیز می‌توان فاز ترمودینامیکی سیاه‌چاله را از روی رفتار دینامیکی اختلالات نرده‌ای وارده بر سیاه‌چاله معین نمود. در بررسی اثر گذار فازهای هم‌دما و هم‌فشار در نقطهٔ بحرانی بر مدهای شبه‌نرمال، رفتار مدها در فازهای سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ تغییر نمی‌کند [۲۰]. اما



شکل۹. رفتار بسامد مدهای شبه‌نرمال برای سیاه‌چاله‌های بزرگ در حالت بحرانی. پیکان‌ها نشان‌دهندهٔ جهت افزایش اندازهٔ سیاه‌چاله هستند.

ما در اینجا نشان دادیم که با در نظر گرفتن نقاط دور از نقطهٔ گذار می‌توان تفاوت رفتار مدها را مشاهده نمود و بنابراین فاز و گذار فاز را با استفاده از آن تعیین کرد.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله با در نظر گرفتن سیاه‌چالهٔ پاددوسیتهٔ باردار، ابتدا کمیت‌های ترمودینامیکی برای آن معرفی و سپس قانون اول ترمودینامیک برای این سیاه‌چاله نوشته شد. در ادامه، گذار فاز ترمودینامیکی سیاه‌چاله‌های باردار پاددوسیته در فرآیند هم‌بار برای بارهای کوچکتر و مساوی بار بحرانی مورد بررسی قرار گرفت. با محاسبهٔ انرژی آزاد گیبس و مطالعهٔ رفتار آن برحسب دما برای بارهای کمتر از بار بحرانی توانستیم گذار فاز مرتبهٔ اول بین سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ را مشاهده نماییم. همچنین به‌ازای بار بحرانی، گذار فاز مرتبهٔ دوم بین سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ را مشاهده کردیم. در ادامه به‌حل عددی معادلهٔ کلاین-گوردون با میدان نرده‌ای حقیقی در حضور سیاه‌چاله به‌روش پرتابی پرداختیم تا بتوانیم بسامد مدهای شبه‌نرمال را به‌دست آوریم.

با مطالعهٔ رفتار بسامدها در فازهای سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ نشان دادیم که شیب نمودار قسمت موهومی برحسب قسمت حقیقی در این فازها به‌شدت متفاوت است. این تفاوت، در حالت بحرانی، برای فاز سیاه‌چاله‌های کوچک، خود را در نقاط دور از نقطهٔ گذار فاز نشان می‌دهد. بنابراین از روی رفتار بسامدها می‌توان فاز و گذار فاز ترمودینامیکی سیاه‌چاله‌ها را تشخیص داد. این مشخص می‌کند که اثر فاز ترمودینامیکی سیاه‌چاله در رفتار دینامیکی اختلالات نرده‌ای وارد شده به‌آن منعکس می‌شود. ارتباط گذار فاز ترمودینامیکی سیاه‌چاله با رفتار مدهای شبه‌نرمال از جنبهٔ رصدی نیز حائز اهمیت است، چرا که اطلاعات گذار فاز ترمودینامیکی می‌تواند در رصد امواج گرانشی که ارتباط نزدیکی با مدهای شبه‌نرمال دارند، پدیدار شود.

در این مقاله، ارتباط گذار فاز ترمودینامیکی و دینامیک میدان نرده‌ای اطراف سیاه‌چاله‌های پاددوسیتهٔ باردار چهار بُعدی را مطالعه کردیم. برای مطالعات آتی می‌توان اثر ابعاد بالاتر، که از منظر نظریهٔ ریسمان دارای اهمیت هستند را بررسی کرد. همچنین می‌توان ارتباط بین رفتار مُدهای شبه‌نرمال مربوط به‌انواع دیگر اختلالات، از جمله اختلال برداری و اختلال اسپینوری، را با فاز ترمودینامیکی سیاه‌چاله مورد مطالعه قرار داد. علاوه‌براین، مطالعهٔ تأثیر غیرخطی بودن الکترودینامیک حاکم بر مدل نیز دارای اهمیت است.

تشکر و قدردانی

مهدی کردزنگنه و داود افشار از دانشگاه شهید چمران اهواز برای حمایت مالی از این مقاله تحت پژوهانه‌های شمارهٔ به‌ترتیب SCU.SP1402.37271 و SCU.SP1402.812 تشکر و قدردانی می‌کنند.

مرجع‌ها

[1] S.W. Hawking, Gravitational Radiation from Colliding Black Holes, Physical Review Letters, 26 (1971) 1344. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.26.1344

[2] J.D. Bekenstein, Black Holes and Entropy, Physical Review D, 7 (1973) 2333-2346.
https://doi.org/10.1103/PhysRevD.7.2333

[3] J.M. Bardeen, B. Carter, S.W. Hawking, The four laws of black hole mechanics, Communications in Mathematical Physics, 31 (1973) 161-170. https://doi.org/10.1007/BF01645742

[4] S.W. Hawking, Particle creation by black holes, Communications in Mathematica Physics, 43 (1975) 199-220. https://doi.org/10.1007/BF02345020

[5] S.W. Hawking, D.N. Page, Thermodynamics of Black Holes in Anti-de Sitter Space, Communications in Mathematical Physics, 87 (1983) 577-588. https://doi.org/10.1007/BF01208266

[6] E. Witten, Anti-de Sitter Space, Thermal Phase Transition, And Confinement in Gauge Theories, Advances in Theoretical and Mathematical Physics, 2 (1998) 505-532.

https://doi.org/10.4310/ATMP.1998.v2.n3.a3

[7] A. Chamblin, R. Emparan, C.V. Johnson, R. C. Myers, Charged AdS black holes and catastrophic holography, Physical Review D, 60 (1999) 064018. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.60.064018

[8] B.P. Dolan, The cosmological constant and the black hole equation of state, Classical and Quantum Gravity, 28 (2011) 125020. https://doi.org/10.1088/0264-9381/28/12/125020

[9] D. Kubiznak, R.B. Mann, P-V criticality of charged AdS black holes, Journal of High Energy Physics, 07 (2012) 33. https://doi.org/10.1007/JHEP07(2012)033

[10] S. Gunasekaran, R.B. Mann, D. Kubiznak, Extended phase space thermodynamics for charged and rotating black holes and Born-Infeld vacuum polarization, Journal of High Energy Physics, 11 (2012) 110. https://doi.org/10.1007/JHEP11(2012)110

[11] A. Dehyadegari, A. Sheykhi, A. Montakhab, Critical behaviour and microscopic structure of charged AdS blackholes via an alternative phase space, Physics Letters B, 768 (2017) 23 5-240. https://doi.org/10.1016/j.physletb.2017.02.064

[12] A. Dehyadegari, A. Sheykhi, Reentrant phase transition of Born-Infeld-AdS black holes, Physical Review D, 98 (2018) 024011.
https://doi.org/10.1103/PhysRevD.98.024011

[13] C.V. Vishveshwara, Scattering of gravitational radiation by a Schwarzschild black-hole, Nature, 227 (1970) 936–938. https://doi.org/10.1038/227936a0

[14] S. Chandrasekhar, S. Detweiler, The quasi-normal modes of the Schwarzschild black hole, Proceedings of the Royal Society A, 344 (1975) 441-452. https://doi.org/10.1098/rspa.1975.0112

[15] H.P. Nollert, Quasinormal modes: the characteristic sound of black holes and neutron stars, Classical and Quantum Gravity, 16 (1999) 159-216. https://doi.org/10.1088/0264-9381/16/12/201

[16] K.D. Kokkotas, B.G. Schmidt, Quasi-normal modes of stars and black holes, Living Reviews in Relativity, 2 (1999) 2. https://doi.org/10.12942/lrr-1999-2

[17] B. Wang, Perturbations around black holes, Brazilian Journal of Physics, 35 (2005) 1029-1037. https://doi.org/10.1590/S0103-97332005000700002

[18] S. Fernando, C. Holbrook, Stability and quasi normal modes of charged black holes in Born-Infeld gravity, International Journal of Theoretical Physics, 45 (2006) 1630-1645. https://doi.org/10.1007/s10773-005-9024-9

[19] R.A. Konoplya, A. Zhidenko, Quasinormal modes of black holes: from astrophysics to string theory, Reviews of Modern Physics, 83 (2011) 793-836. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.83.793

[20] Y. Liu, D.C. Zou, B. Wang, Signature of the Van der Waals like small-large charged AdS black hole phase transition in quasinormal modes, Journal of High Energy Physics, 09 (2014) 179. https://doi.org/10.1007/JHEP09(2014)179

[21] S. Priyadarshinee, Quasinormal mode of dyonic hairy black hole and its interplay with phase transitions, The European Physical Journal Plus, 139 (2024) 258. https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-024-05044-y

[22] Y. Guo, H. Xie, Y.G. Miao, Signal of phase transition hidden in quasinormal modes of regular AdS black holes, Physics Letters B, 855 (2024) 138801. https://doi.org/10.1016/j.physletb.2024.138801

[23] R. Arnowitt, S. Deser, C.W. Misner, Dynamical Structure and Definition of Energy in General Relativity, Physical Review, 116 (1959) 1322-1330. https://doi.org/10.1103/PhysRev.116.1322

[24] R. Arnowitt, S. Deser, C.W. Misner, Coordinate Invariance and Energy Expressions in General Relativity, Physical Review, 122 (1961) 997-1006. https://doi.org/10.1103/PhysRev.122.997

[25] R. Arnowitt, S. Deser, C.W. Misner, The Dynamics of General Relativity, General Relativity and Gravitation, 40 (1962) 227-264. https://doi.org/10.1007/s10714-008-0661-1

[26] B.P. Dolan, Pressure and volume in the first law of black hole thermodynamics, Classical and Quantum Gravity, 28 (2011) 235017. https://doi.org/10.1088/0264-9381/28/23/235017