

The isocharge phase transition signature in quasi-normal modes of charged anti-de Sitter black holes

Farkhondeh Roshan Bakhsh¹, Mahdi Kord Zangeneh^{* 1,2}, Davood Afshar^{1,2}

¹Department of Physics, Faculty of Science, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

²Center for Research on Laser and Plasma, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Received: 25.06.2024 Final revised: 19.09.2024 Accepted: 23.09.2024

[Doi: 10.22055/jrmbms.2024.19702](https://doi.org/10.22055/jrmbms.2024.19702)

Abstract

In this paper, we aim to investigate the relationship between the thermodynamic phase of a charged anti-de Sitter black hole and the dynamic behavior of scalar perturbations around it. To achieve this goal, we first examine the thermodynamics of the charged anti-de Sitter black hole and analyze the isocharge phase transition between small and large black holes. Next, by considering a scalar field within the background of black hole, we solve the Klein-Gordon equation using the shooting method to determine the frequency of quasi-normal modes. Finally, we compare the behavior of the frequency of quasi-normal modes in the small and large black hole phases, demonstrating the distinct slope of the imaginary part versus the real part curve in these phases. This suggests that the thermodynamic phase and phase transition of the black hole can be identified through the dynamic properties of scalar perturbations around it.

Keywords: Anti-de Sitter black holes, Isocharge phase transition, Real scalar field, Shooting method, Quasi-normal mode

* Corresponding Author: mkzangeneh@scu.ac.ir

اثر گذار فاز هم‌بار بر مدهای شبه‌نرمال سیاه‌چاله‌های باردار پاددوسسته

فرخنده روشن بخش^۱، مهدی کردزنگنه^{۱،۲*}، داود افشار^{۱،۲}

^۱گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

^۲مرکز تحقیقات لیزر و پلاسما، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

دریافت: ۱۴۰۳/۰۴/۰۵ ویرایش نهائی: ۱۴۰۳/۰۶/۲۹ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۷/۰۲

Doi: [10.22055/jrmb.2024.19702](https://doi.org/10.22055/jrmb.2024.19702)

چکیده

در این مقاله قصد داریم ارتباط بین فاز ترمودینامیکی سیاه‌چاله باردار پاددوسسته و رفتار دینامیکی اختلال نرده‌ای اطراف آن را مورد مطالعه قرار دهیم. بدین منظور، ابتدا با بررسی ترمودینامیک سیاه‌چاله باردار پاددوسسته، گذار فاز هم‌بار بین فاز سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ را بررسی خواهیم نمود. سپس، با در نظر گرفتن یک میدان نرده‌ای در پس‌زمینه سیاه‌چاله، به حل معادله کلاین-گوردون با استفاده از روش عددی پرتابی پرداخته و بسامد مدهای شبه‌نرمال را به دست می‌آوریم. در نهایت، با مقایسه رفتار بسامد مدها در فازهای سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ، نشان می‌دهیم که شیب نمودار قسمت موهومی برحسب قسمت حقیقی بسامدها در این فازها متفاوت است. بنابراین، فاز و گذار فاز ترمودینامیکی سیاه‌چاله را می‌توان از طریق رفتار دینامیکی اختلالات نرده‌ای اطراف آن معین نمود.

کلیدواژگان: سیاه‌چاله باردار پاددوسسته، گذار فاز هم‌بار، میدان نرده‌ای حقیقی، روش پرتابی، مد شبه‌نرمال

مقدمه

فاز در پلاسمای کوآرک-گلوئون مرتبط شد [۶]. مطالعات بعدی نشان داد که مشابه با گذار فاز واندروالس گاز-مایع، سیاه‌چاله پاددوسسته باردار، گذار فاز مرتبه اول هم‌فشار و هم‌دما را بین سیاه‌چاله‌های بزرگ و کوچک در فضای فاز ترمودینامیکی توسعه یافته تجربه می‌کند [۷-۱۰]. در فضای فاز توسعه یافته، ثابت کیهان‌شناسی متغیر به عنوان فشار در نظر گرفته می‌شود، در حالی که کمیت مزدوج آن، حجم سامانه است. در رویکرد فضای فاز توسعه یافته، با تعریف فشار برای سیاه‌چاله لازم است تا ثابت کیهان‌شناسی، که یک کمیت مربوط به فضا است و با سیاه‌چاله ارتباط ندارد را به فشار سیاه‌چاله مرتبط کرد و از این طریق فضای فاز را توسعه داد. از دیدگاهی متفاوت، می‌توان ثابت

یکی از مورد توجه‌ترین شاخه‌های مطالعاتی در نسبیت عام، بررسی ارتباط گرانش و ترمودینامیک و به تبع آن، مطالعه سیاه‌چاله‌ها به عنوان سامانه‌های ترمودینامیکی است. در نیمه اول دهه ۱۹۷۰، با کارهای هاوکنینگ، بکنشتاین و دیگر فیزیک‌دانان، آنتروپی، دما و چهار قانون ترمودینامیک برای سیاه‌چاله‌ها ارائه شد [۴-۱]. در ادامه، گذار فازهای مشابه با گذار فازهای ترمودینامیکی برای سیاه‌چاله‌ها مورد مطالعه قرار گرفت. هاوکنینگ و پیچ نشان دادند که یک گذار فاز مرتبه اول بین تابش گرمایی و سیاه‌چاله پاددوسسته وجود دارد [۵]. این گذار فاز توسط ویتن به یک گذار

* نویسنده مسئول: mkzangeneh@scu.ac.ir

در مقاله حاضر، ما قصد داریم پس از مطالعه گذار فاز هم‌بار سیاه‌چاله‌های پاددوسیتته باردار، به بررسی ارتباط گذار فاز و رفتار مدهای شبه‌نرمال بپردازیم. ما نشان خواهیم داد که در رویکرد جایگزین فضای فاز توسعه‌یافته نیز، رفتار مدهای شبه‌نرمال می‌تواند منعکس‌کننده فاز و گذار فاز ترمودینامیکی سیاه‌چاله باشد. این به‌نوبه خود تأکید مجددی بر ارتباط نزدیک بین رفتار دینامیکی و ترمودینامیکی سیاه‌چاله‌ها نیز می‌باشد.

سیاه‌چاله پاددوسیتته باردار

جواب خلاً معادله اینشتین در حضور ثابت کیهان‌شناسی منفی Λ ، سیاه‌چاله پاددوسیتته را می‌دهد. در این بخش، ویژگی‌های ترمودینامیکی سیاه‌چاله‌های پاددوسیتته باردار چهار بُعدی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

متریک سیاه‌چاله پاددوسیتته در چهار بُعد با رابطه کلی

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2, \quad 1$$

داده می‌شود که در آن $d\Omega^2$ عنصر خط کره دو بعدی و تابع $f(r)$ ، تابع متریک سیاه‌چاله،

$$f(r) = 1 - \frac{m}{r} + \frac{q^2}{r^2} + \frac{r^2}{l^2}, \quad 2$$

می‌باشد. در رابطه فوق، l شعاع فضای پاددوسیتته بوده و با ثابت کیهان‌شناسی به شکل $l^2 = -\frac{3}{\Lambda}$ ارتباط دارد. با توجه به صفر شدن تابع متریک در افق رویداد r_H ، $f(r_H) = 0$ می‌توان پارامتر m را به دست آورد:

$$m = r_H + \frac{q^2}{r_H} + \frac{r_H^3}{l^2}. \quad 3$$

رابطه پارامترهای m و q با جرم و بار کل سیاه‌چاله به صورت

$$Q = \frac{q}{4\pi}, \quad 4$$

$$M = \frac{m}{8\pi} = \frac{r_H}{8\pi} + \frac{q^2}{8\pi r_H} + \frac{r_H^3}{8\pi l^2}, \quad 5$$

داده می‌شود. روابط فوق با استفاده از قانون گاوس برای

کیهان‌شناسی را بدون تغییر نگه داشت و بار را متغیر در نظر گرفت [۱۱]. در این رویکرد، ثابت کیهان‌شناسی به‌عنوان یک کمیت ترمودینامیکی متغیر و مؤثر در رخ دادن گذار فاز در نظر گرفته نمی‌شود و فرآیند ترمودینامیکی در فضای فازی رخ می‌دهد که در آن سیاه‌چاله در یک هندسه پس‌زمینه پاد-دوسیتته ثابت تحول می‌یابد. این فضای فاز می‌تواند جایگزین فضای فاز توسعه‌یافته باشد. علاوه بر این، در نظر گرفتن بار سیاه‌چاله به‌عنوان متغیر، طبیعی بوده و استفاده از این دیدگاه جایگزین، برای توصیف گذار فاز و رفتار بحرانی، سبب می‌شود تا تابع پاسخ مربوطه پایداری و ناپایداری سامانه را به‌درستی معین کند [۱۱]. با استفاده از این رویکرد، گذار فاز هم‌بار سیاه‌چاله باردار پاددوسیتته بورن-اینفلد مطالعه و بروز گذار فاز بازگشتی نشان داده شده است [۱۲].

برخی سامانه‌های فیزیکی دارای مدهای نوسانی منحصر به‌فرد می‌باشند. برای سامانه‌های غیراتلافی، این مدها حقیقی بوده و تحت عنوان مدهای نرمال شناخته می‌شوند. سیاه‌چاله‌ها به‌دلیل تابشی که دارند، سامانه‌های اتلافی محسوب می‌شوند. از این‌رو، برای توصیف دینامیکی آنها از مدهای مختلط که از دست رفتن انرژی را نشان می‌دهند، استفاده می‌شود [۱۳، ۱۴]. به‌چنین مدهای مختلطی، مدهای شبه‌نرمال گفته می‌شود. با مطالعه مدهای شبه‌نرمال سیاه‌چاله‌ها می‌توان اطلاعات مفیدی از جمله در مورد پایداری دینامیکی آنها به‌دست آورد [۱۹-۱۵]. همچنین، اثر گذار فاز سیاه‌چاله‌های کوچک-بزرگ پاددوسیتته باردار در فضای فاز توسعه‌یافته بر مدهای شبه‌نرمال مطالعه شده است [۲۰]. اخیراً، ارتباط رفتار مدهای شبه‌نرمال و گذار فاز ترمودینامیکی سیاه‌چاله‌های مودار در چارچوب گرانش اینشتین-ماکسول-اسکالر [۲۱] و سیاه‌چاله‌های پاددوسیتته عادی در کلاس‌های باردین و هایوارد [۲۲] نیز مورد بررسی قرار گرفته است.

سیاه‌چاله‌های پاددوسیتة باردار را با این رویکرد جدید مورد بررسی قرار دهیم.

در این حالت، قانون اول ترمودینامیک به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\delta dM = T\delta S + \Phi\delta Q, \quad 9$$

در آن، پتانسیل الکتریکی است. همچنین، برای تعیین نقطه بحرانی، می‌بایست شعاع افق و بار سیاه‌چاله را در این نقطه محاسبه کنیم. بدین منظور، با استفاده از معادله حالت ۷ و شرط‌های

$$\frac{\partial T}{\partial r_H} = 0, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial r_H^2} = 0, \quad 10$$

در نقطه بحرانی، این کمیت‌ها را محاسبه خواهیم کرد. شرط‌های ۱۰ در نقطه بحرانی، به معادلات:

$$\frac{3}{4\pi l^2} + \frac{12\pi Q^2}{r_H^4} - \frac{1}{4\pi r_H^2} = 0, \quad 11$$

$$-\frac{48\pi Q^2}{r_H^5} + \frac{1}{2\pi r_H^3} = 0, \quad 12$$

منجر می‌شوند. با استفاده از معادلات فوق، شعاع افق و بار سیاه‌چاله متناظر با نقطه بحرانی به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$Q_c = \frac{l}{24\pi}, \quad r_{Hc} = \frac{l}{\sqrt{6}}. \quad 13$$

با استفاده از این مقادیر، دمای بحرانی T_c نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$T_c = \frac{1}{\pi l} \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad 14$$

سیاه‌چاله‌ها و رابطه جرم ADM به دست می‌آیند [۲۵-۲۳].

فشار ترمودینامیکی سیاه‌چاله در فضای پاددوسیتة چهاربُعدی به صورت زیر تعریف می‌شود [۸،۲۶]:

$$P = -\frac{\Lambda}{8\pi} = \frac{3}{8\pi l^2}. \quad 6$$

همچنین دمای سیاه‌چاله با رابطه $T = \frac{\kappa}{2\pi}$ داده می‌شود [۴] که در آن κ گرانش سطحی سیاه‌چاله است. بدین ترتیب، دمای سیاه‌چاله

$$T = \frac{f'(r_H)}{4\pi} = -\frac{4\pi Q^2}{r_H^3} + \frac{1}{4\pi r_H} +, \quad 7$$

خواهد بود. در رابطه بالا، پریم به معنی مشتق‌گیری نسبت به شعاع r است. آنتروپی سیاه‌چاله به ازای واحد سطح نیز عبارت خواهد بود از

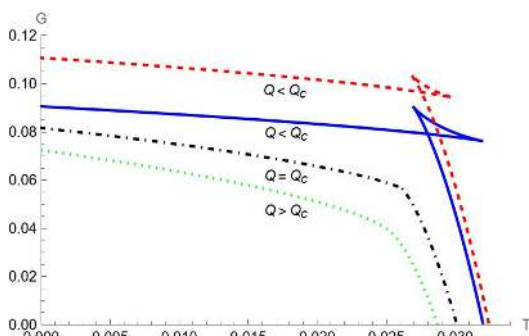
$$S = \frac{r_H^2}{4}. \quad 8$$

یافتن ارتباط فیزیکی سیاه‌چاله‌ها و قوانین ترمودینامیک، از دست آوردهای مهم فیزیک نظری است. این موضوع از آن جهت حائز اهمیت است که می‌تواند امکان وجود سیاه‌چاله را از منظر پایداری ترمودینامیکی نیز نشان دهد. در این چارچوب می‌توان پدیده‌های ترمودینامیکی مرتبط با سیاه‌چاله‌ها از جمله گذار فاز را بررسی نمود.

گذار فاز ترمودینامیکی

همان‌طور که پیش از این اشاره شد، اخیراً رویکرد جدیدی در مطالعه گذار فاز سیاه‌چاله معرفی شده است که در آن بار سیاه‌چاله، به عنوان یک کمیت ترمودینامیکی متغیر، نقش اصلی را ایفا می‌کند. فضای فاز معرفی شده در این رویکرد، جایگزین فضای فاز توسعه‌یافته که در آن فشار/ثابت کیهان‌شناسی متغیر است، می‌شود. در این بخش قصد داریم تا گذار فاز

به‌ازای بارهای بزرگ‌تر از بار بحرانی، همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است، گذار فازی رخ نمی‌دهد.



شکل ۱. نمودار انرژی آزاد گیبس برحسب دما به‌ازای بارهای مختلف. نمودارهای قرمز (خط‌چین) و آبی (خط ممتد) به‌ترتیب مربوط به مقادیر بار $Q = 0.10$ و $Q = 0.09$ (کمتر از بار بحرانی) بوده و نمودار سبز (نقطه‌چین) مربوط به بار $Q = 0.15$ (بزرگ‌تر از بار بحرانی) است. نمودار سیاه (خط-نقطه‌چین) مربوط به بار بحرانی است. نمودارها به‌منظور واضح‌تر شدن تصویر، در راستای محور عمودی کمی جابه‌جا شده‌اند.

در ادامه، گذار فاز مرتبه اول بین سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ را به‌طور دقیق‌تر بررسی می‌کنیم. در نمودار شکل ۲، ناحیه آبی رنگ (خط‌چین)، سیاه‌چاله‌های کوچک و ناحیه قرمز رنگ (خط-نقطه‌چین)، سیاه‌چاله‌های بزرگ را نشان می‌دهد. در محل تلاقی این دو ناحیه، در دمای $T = 0.0275$ ، گذار فاز بین سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ رخ می‌دهد. برای واضح‌تر شدن موضوع، در شکل ۳، نمودار دما برحسب شعاع افق رویداد، متناظر با نمودار شکل ۲، رسم شده است.

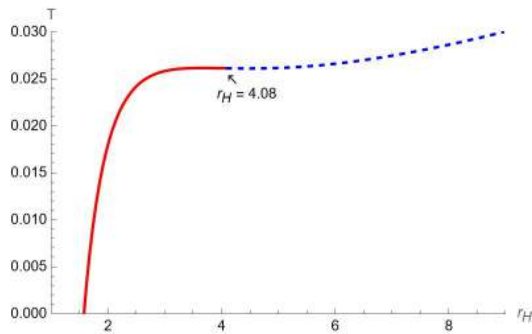
همان‌طور که در شکل ۳ به‌وضوح دیده می‌شود، ناحیه آبی رنگ (خط‌چین) مربوط به شعاع‌های افق رویداد کوچک و ناحیه قرمز رنگ (خط-نقطه‌چین) مربوط به شعاع‌های افق رویداد بزرگ است که در نقطه گذار، تغییر فاز بین آنها رخ می‌دهد.

انرژی آزاد گیبس در مطالعه گذار فاز نقش اساسی دارد. این کمیت می‌تواند رخداد و مرتبه گذار فاز را تعیین کند. ناپیوستگی در نمودار انرژی آزاد گیبس برحسب دما، معادل گذار فاز مرتبه صفرم و در مشتق مرتبه اول آن معادل گذار فاز مرتبه اول می‌باشد. برای مشتقات مراتب بالاتر انرژی آزاد گیبس نیز به‌همین صورت خواهد بود. انرژی آزاد گیبس $G = M - TS$ را با جای‌گذاری از روابط ۵، ۷ و ۸ می‌توان محاسبه نمود:

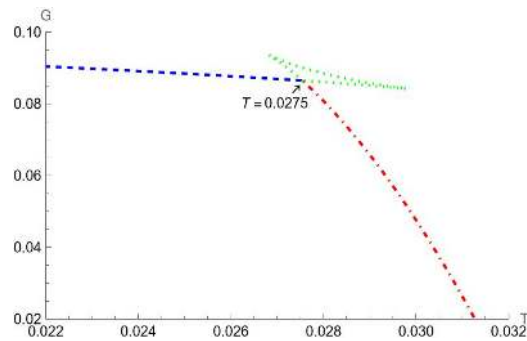
$$G = \frac{3\pi Q^2}{r_H} + \frac{r_H}{16\pi} - \frac{r_H^3}{16\pi l^2}. \quad 15$$

با توجه به اینکه در این حالت، بار را به‌عنوان یک متغیر در نظر گرفته‌ایم، در اینجا انرژی آزاد گیبس تابع بار و دما، $G(T, Q)$ است. از اینجا به بعد در محاسبات به‌طور دلخواه $l = 10$ در نظر گرفته شده است. در نتیجه با توجه به رابطه ۱۳، بار بحرانی $Q_c \approx 0.13$ خواهد بود.

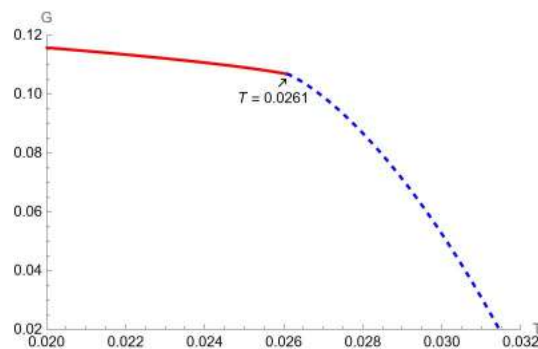
در شکل ۱، نمودار انرژی آزاد گیبس برحسب دما به‌ازای مقادیر مختلف بار (کمتر، بیشتر و مساوی بار بحرانی) رسم شده است. سامانه همواره حالتی را انتخاب می‌کند که کم‌ترین انرژی آزاد گیبس را داشته باشد. از همین رو، برای بار کمتر از بار بحرانی $Q < Q_c$ ، یک گذار فاز مرتبه اول بین سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ رخ می‌دهد. در نقطه گذار فاز، سیستم برای اینکه کم‌ترین مقدار انرژی آزاد را انتخاب کند، از یک فاز به فاز دیگر گذار می‌کند. این گذار فاز، مشابه با گذار فاز مرتبه اول مایع-گاز در شار و اندروالس است. همچنین، به‌ازای بار بحرانی $Q = Q_c$ ، یک گذار فاز مرتبه دوم رخ می‌دهد. نقطه بحرانی، آخرین نقطه‌ای است که در آن امکان وقوع گذار فاز وجود دارد. به‌عبارت دیگر،



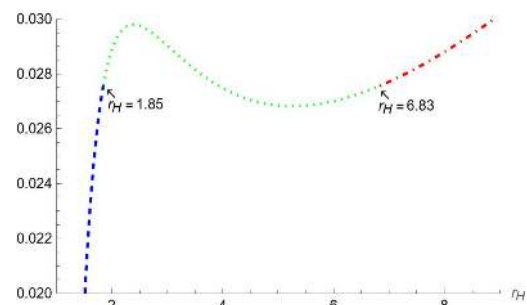
شکل ۴. نمودار انرژی آزاد گیبس برحسب دما برای سیاه‌چاله پاددوسینه باردار به‌ازاء بار بحرانی $Q = Q_c \approx 0.13$



شکل ۲. نمودار انرژی آزاد گیبس برحسب دما برای بار $Q=0.10$



شکل ۵. نمودار دما برحسب شعاع افق رویداد متناظر با شکل ۴.



شکل ۳. نمودار دما برحسب شعاع افق رویداد متناظر با نمودار شکل ۲.

در شکل ۴ نمودار انرژی آزاد گیبس برحسب دما برای نقطه بحرانی رسم شده است. در این حالت، ناحیه قرمز رنگ (خط ممتد) نمودار، فاز سیاه‌چاله‌های کوچک و ناحیه آبی رنگ (خط چین) نمودار، فاز سیاه‌چاله‌های بزرگ را نشان می‌دهد.

نمودار دما برحسب شعاع افق رویداد متناظر با شکل ۴ نیز در شکل ۵ رسم شده است.

همان‌طور که از شکل ۵ مشخص است، در محل گذار فاز، شیب نمودار $T - r_H$ صفر شده و در نتیجه، با توجه به رابطه ۱۶، ظرفیت گرمایی در این نقطه، واگرا می‌شود. این بدان معناست که در این نقطه، واگرایی در مشتق مرتبه دوم انرژی آزاد گیبس برحسب دما وجود دارد (دقت کنید $S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_Q$). در نتیجه، در نقطه بحرانی، یک گذار فاز مرتبه دوم بین سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ خواهیم داشت. علاوه بر این، با توجه به مثبت بودن شیب نمودار دما برحسب شعاع افق رویداد در فازهای سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ

در نمودار دما برحسب شعاع افق رویداد (شکل ۳)، شیب نمودار نشان‌دهنده تغییرات دما نسبت به افق رویداد در بار ثابت، $\left(\frac{\partial T}{\partial r_H}\right)_Q$ است. از طرف دیگر، ظرفیت گرمایی با تغییرات آنتروپی نسبت به دما متناسب بوده $(C_Q = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_Q)$ و آنتروپی نیز با سطح افق رویداد متناسب است، در نتیجه:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_Q \propto \left(\frac{\partial r_H}{\partial T}\right)_Q = \left(\frac{\partial T}{\partial r_H}\right)_Q^{-1} \quad 16$$

بنابراین علامت شیب نمودار $T - r_H$ مثبت یا منفی بودن ظرفیت گرمایی را تعیین می‌کند (دقت کنید که دما مثبت است). با توجه به توضیحات فوق، در فازهای سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ (نواحی آبی و قرمز) از آنجایی که شیب نمودار $T - r_H$ مثبت است (شکل ۳)، ظرفیت گرمایی مثبت بوده و سامانه از نظر گرمایی پایدار است.

$$\psi'' + \psi' \left[\frac{f'}{f} - \frac{2i\omega}{f} + \frac{2}{r} \right] - \psi \frac{2i\omega}{rf} = 0. \quad 21$$

که شرط مرزی آن در افق رویداد، $\psi(r_H) = 1$ خواهد بود. با قرار دادن تابع متریک $f(r)$ در رابطه ۲۱ و جایگزین نمودن پارامترها، می‌توان بسامد مدهای شبه‌نرمال را با استفاده از روش پرتابی به دست آورد. تابعیت زمانی تابع موج ϕ به صورت $e^{-i\omega t}$ می‌باشد. از آنجایی که بسامد مدهای شبه‌نرمال، مختلط است، داریم:

$$e^{-i\omega t} = e^{-i(\omega_R + i\omega_I)t} = e^{-i\omega_R t} e^{\omega_I t} \quad 22$$

در رابطه فوق، قسمت حقیقی بسامد، ω_R با انرژی ذرات متناسب است. از طرفی، علامت بخش موهومی بسامد، ω_I تعیین کننده پایداری/ناپایداری دینامیکی سیاه‌چاله است، به طوری که اگر $\omega_I < 0$ باشد، تابع موج دارای میرایی نمایی بوده و پایدار است و اگر $\omega_I > 0$ باشد، تابع موج دارای رشد نمایی بوده و سیاه‌چاله از نظر دینامیکی ناپایدار است.

رفتار بسامد مدها و فاز سیاه‌چاله

در شکل ۳، نمودار دما برحسب شعاع افق رویداد برای سیاه‌چاله‌ای که گذار فاز مرتبه اول بین فاز سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ را تجربه می‌کند رسم شده و محدوده فازها مشخص شده است. در جدول ۱، بسامدهای مدهای شبه‌نرمال اختلال نرده‌ای اطراف سیاه‌چاله در فازهای سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ که از حل عددی معادله کلاین-گوردون به روش پرتابی محاسبه شده‌اند، آورده شده است. بسامدهای بالای خط افقی مربوط به فاز سیاه‌چاله‌های کوچک و پایین خط افقی مربوط به فاز سیاه‌چاله‌های بزرگ می‌باشند.

(شکل ۵)، سامانه در هر دو فاز از نظر گرمایی پایدار است.

مدهای شبه‌نرمال نرده‌ای

در این بخش ابتدا یک اختلال نرده‌ای حول سیاه‌چاله باردار پاددوسسته در نظر می‌گیریم. سپس مدهای شبه‌نرمال مربوطه را به صورت عددی با استفاده از روش پرتابی به دست می‌آوریم. برای اختلال نرده‌ای اطراف سیاه‌چاله، تابع موجی به صورت:

$$\phi(r, t) = \psi(r)e^{-i\omega t}, \quad 17$$

در نظر می‌گیریم. معادله کلاین-گوردون حاکم بر یک میدان نرده‌ای حقیقی با جرم صفر به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \phi = 0. \quad 18$$

با استفاده از روابط ۱۷ و ۱۸ و در نظر گرفتن متریک سیاه‌چاله در فضا-زمان چهاربعدی که در رابطه ۱ داده شده است، بخش شعاعی معادله کلاین-گوردون پس از اعمال جداسازی متغیرها به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\psi''(r) + \left[\frac{f'(r)}{f(r)} + \frac{2}{r} \right] \psi'(r) + \frac{\omega^2 \psi(r)}{f(r)^2} = 0. \quad 19$$

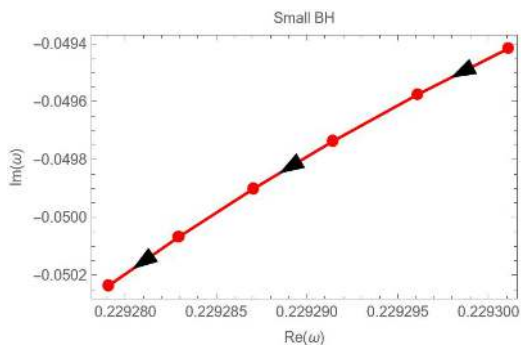
برای حل این معادله دیفرانسیل باید شرایط مرزی را اعمال کنیم. دو شرط مرزی یکی در بی‌نهایت و دیگری در افق رویداد سیاه‌چاله خواهیم داشت. در بی‌نهایت تابع موج $\psi(r) \rightarrow 0$ می‌رود، چرا که می‌بایست جایگزیده باشد. در افق رویداد $r = r_H$ ، با توجه به اینکه $f(r_H) = 0$ است، معادله ۱۹ به شکل زیر تقلیل می‌یابد:

$$\psi'' + \frac{f'}{f} \psi' + \frac{\omega^2}{f^2} \psi = 0 \quad 20$$

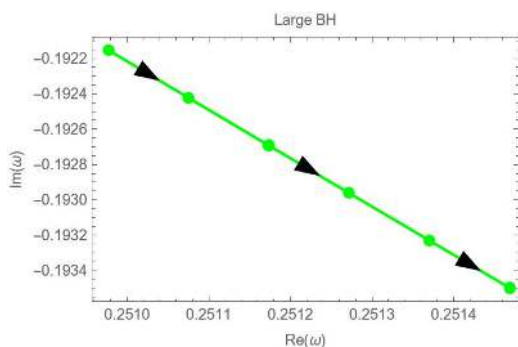
که جواب آن به صورت $\psi(r) = e^{-i \int \frac{\omega}{f(r)} dr}$ خواهد بود. با باز تعریف $\psi(r)$ به صورت $\lambda \psi(r) e^{-i \int \frac{\omega}{f(r)} dr}$ معادله ۱۹ به شکل زیر در می‌آید:

که مشاهده می‌شود، این نمودارها دارای شیب‌های متفاوتی هستند. این نشان می‌دهد که رفتار بسامد مدها برای فازهای سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ متفاوت بوده و منعکس‌کننده فاز ترمودینامیکی سیاه‌چاله در رفتار دینامیکی اختلالات نرده‌ای اطراف آن است.

در جدول ۲، بسامدهای مدهای شبه‌نرمال اختلالات نرده‌ای در اطراف سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ که برای حالت بحرانی $Q = Q_c \approx 0.13$ محاسبه شده‌اند، آورده شده است. بسامدهای بالای خط افقی



شکل ۶. رفتار بسامد مدهای شبه‌نرمال برای سیاه‌چاله‌های کوچک. پیکان‌ها نشان‌دهنده جهت افزایش اندازه سیاه‌چاله هستند.



شکل ۷. رفتار بسامد مدهای شبه‌نرمال برای سیاه‌چاله‌های بزرگ. پیکان‌ها نشان‌دهنده جهت افزایش اندازه سیاه‌چاله هستند. مربوط به سیاه‌چاله‌های کوچک و پایین خط افقی مربوط به سیاه‌چاله‌های بزرگ می‌باشند.

جدول ۱. بسامد مدهای شبه‌نرمال برای فازهای سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ با بار $Q = 0.10 < Q_c$

r_H	T	ω
1.79	0.0268	$0.2293064743 - 0.04925930644 i$
1.80	0.0269	$0.2293011071 - 0.04941607506 i$
1.81	0.0270	$0.2292961062 - 0.04957530461 i$
1.82	0.0272	$0.2292914357 - 0.04973696420 i$
1.83	0.0273	$0.2292870617 - 0.04990102143 i$
1.84	0.0274	$0.2292829522 - 0.05006744235 i$
6.84	0.027570	$0.2475912666 - 0.1824697781 i$
6.85	0.027579	$0.2476816743 - 0.1827389314 i$
6.86	0.027588	$0.2477722914 - 0.1830080754 i$
6.87	0.027596	$0.2478631176 - 0.1832772099 i$
6.88	0.02760	$0.2479541531 - 0.1835463353 i$
6.89	0.02761	$0.2480453978 - 0.1838154520 i$

جدول فوق، برای فاز سیاه‌چاله‌های کوچک، نشان می‌دهد که با افزایش شعاع افق رویداد سیاه‌چاله، قسمت حقیقی بسامدها کاهش یافته و قدر مطلق قسمت موهومی بسامدها افزایش پیدا می‌کند. همچنین، برای فاز سیاه‌چاله‌های بزرگ، نشان می‌دهد که با بزرگ شدن شعاع افق رویداد، قسمت حقیقی و قدر مطلق قسمت موهومی بسامدها افزایش پیدا می‌کنند. این بدین معناست که در سیاه‌چاله‌های کوچک/بزرگ، زمانی که اندازه سیاه‌چاله افزایش می‌یابد، انرژی اختلالات نرده‌ای کمتر/بیشتر می‌شود. نظر به اینکه علامت قسمت موهومی بسامدها منفی است، اختلال، میرا و سیاه‌چاله‌ها تحت آن از نظر دینامیکی پایدار هستند. با افزایش اندازه/دمای سیاه‌چاله‌های بزرگ و کوچک، قدر مطلق قسمت موهومی بسامد افزایش یافته و در نتیجه میرایی اختلالات با سرعت بیشتری رخ می‌دهد.

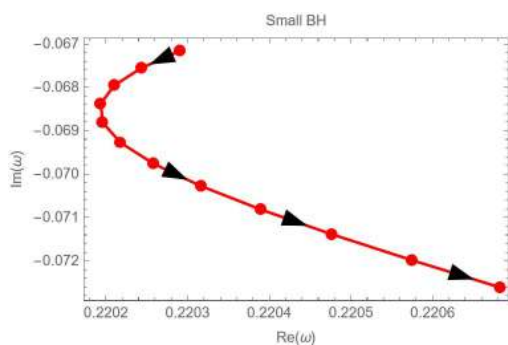
با توجه به اینکه مدهای شبه‌نرمال، صداهای مشخصه سیاه‌چاله هستند [۱۵]، انتظار می‌رود که گذار فاز سیاه‌چاله در رفتار بسامد این مدها منعکس شود. قسمت موهومی، $\text{Im}(\omega)$ ، برحسب قسمت حقیقی، $\text{Re}(\omega)$ ، بسامد مدهای شبه‌نرمال برای فاز سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ در شکل‌های ۶ و ۷، رسم شده است. همانگونه

جدول ۲. بسامد مدهای شبه‌نرمال برای فازهای سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ در نقطه بحرانی.

r_H	T	ω
1.99	0.01779	0.2202905177 - 0.06716516413 i
2.03	0.01866	0.2202436910 - 0.06755345786 i
2.07	0.01944	0.2202102160 - 0.06795610245 i
2.11	0.02014	0.2201936826 - 0.06837546814 i
2.15	0.02077	0.2201960825 - 0.06881449073 i
2.19	0.02134	0.2202179155 - 0.06927607435 i
2.23	0.02186	0.2202585229 - 0.06976266873 i
2.27	0.02231	0.2203164622 - 0.07027605737 i
2.31	0.02273	0.2203898771 - 0.07081731788 i
2.35	0.02310	0.2204766939 - 0.07138685861 i
2.47	0.02402	0.2207686346 - 0.07309645065 i
2.51	0.02426	0.2209200427 - 0.07393963150 i
2.55	0.02448	0.2210470021 - 0.07464180630 i
6.40	0.02690	0.2421995565 - 0.1718518014 i
6.43	0.02692	0.2424605849 - 0.1726479644 i
6.46	0.02695	0.2427233289 - 0.1734441387 i
6.49	0.02697	0.2429877908 - 0.1742403275 i
6.52	0.0270	0.2432539731 - 0.1750365339 i
6.55	0.02703	0.2435218781 - 0.1758327615 i
6.58	0.02705	0.2437915081 - 0.1766290137 i
6.61	0.02708	0.2440628655 - 0.1774252943 i
6.64	0.02711	0.2443359527 - 0.1782216075 i
6.66	0.02712	0.2445189719 - 0.1787525036 i
6.67	0.02713	0.2446107708 - 0.1790179577 i
6.69	0.02715	0.2447949466 - 0.1795488795 i

اندازه/دما، انرژی اختلالات نرده‌ای اطراف سیاه‌چاله نیز افزایش می‌یابد. به‌علاوه، با افزایش اندازه/دمای سیاه‌چاله‌های بزرگ، قدر مطلق قسمت موهومی بسامد افزایش یافته و در نتیجه میرایی اختلالات با سرعت بیشتری رخ می‌دهد. از سوی دیگر، در سیاه‌چاله‌های کوچک، با افزایش اندازه/دما، انرژی اختلالات نرده‌ای در اطراف سیاه‌چاله ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. همچنین، با افزایش اندازه/دمای سیاه‌چاله‌های کوچک، قدر مطلق قسمت موهومی بسامدها افزایش یافته و میرایی اختلالات با سرعت بیشتری رخ می‌دهد.

اکنون نمودار بخش موهومی $\text{Im}(\omega)$ برحسب بخش حقیقی $\text{Re}(\omega)$ بسامد مدهای شبه‌نرمال برای فازهای سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ در حالت بحرانی را در شکل‌های ۸ و ۹ بررسی می‌کنیم. شکل‌های ۸ و ۹ نشان می‌دهند که رفتار بسامد مدها برای فاز سیاه‌چاله‌های کوچک، برای نقاط دور از نقطه گذار فاز، با رفتار بسامد مدها در فاز سیاه‌چاله‌های بزرگ متفاوت است.



شکل ۸. رفتار بسامد مدهای شبه‌نرمال برای سیاه‌چاله‌های کوچک در حالت بحرانی. پیکان‌ها نشان‌دهنده جهت افزایش اندازه سیاه‌چاله هستند.

بنابراین، برای گذار فاز مرتبه دوم در نقطه بحرانی نیز می‌توان فاز ترمودینامیکی سیاه‌چاله را از روی رفتار دینامیکی اختلالات نرده‌ای وارده بر سیاه‌چاله معین نمود. در بررسی اثر گذار فازهای هم‌دما و هم‌فشار در نقطه بحرانی بر مدهای شبه‌نرمال، رفتار مدها در فازهای سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ تغییر نمی‌کند [۲۰]. اما

جدول ۲، برای فاز سیاه‌چاله‌های کوچک، نشان می‌دهد که با افزایش شعاع افق رویداد سیاه‌چاله، ابتدا قسمت حقیقی بسامدها کاهش یافته و سپس افزایش می‌یابد. همچنین قدر مطلق قسمت موهومی بسامدها با افزایش شعاع افق رویداد افزایش می‌یابد. برای فاز سیاه‌چاله‌های بزرگ مشاهده می‌کنیم که با بزرگ شدن شعاع افق رویداد، قسمت حقیقی و قدر مطلق قسمت موهومی بسامدها افزایش پیدا می‌کند. منفی بودن علامت قسمت موهومی بسامد، نشان‌دهنده پایداری دینامیکی سیاه‌چاله تحت اختلالات نرده‌ای است. همچنین، در فاز سیاه‌چاله‌های بزرگ با افزایش

سیاه‌چاله‌های کوچک، خود را در نقاط دور از نقطه گذار فاز نشان می‌دهد. بنابراین از روی رفتار بسامدها می‌توان فاز و گذار فاز ترمودینامیکی سیاه‌چاله‌ها را تشخیص داد. این مشخص می‌کند که اثر فاز ترمودینامیکی سیاه‌چاله در رفتار دینامیکی اختلالات نرده‌ای وارد شده به آن منعکس می‌شود. ارتباط گذار فاز ترمودینامیکی سیاه‌چاله با رفتار مدهای شبه‌نرمال از جنبه رصدی نیز حائز اهمیت است، چرا که اطلاعات گذار فاز ترمودینامیکی می‌تواند در رصد امواج گرانشی که ارتباط نزدیکی با مدهای شبه‌نرمال دارند، پدیدار شود.

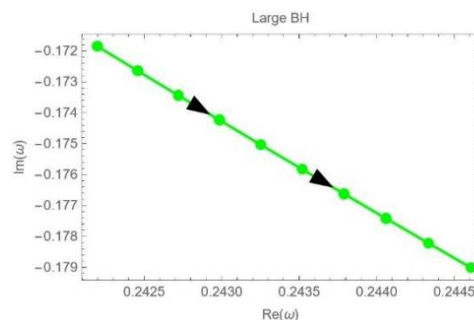
در این مقاله، ارتباط گذار فاز ترمودینامیکی و دینامیک میدان نرده‌ای اطراف سیاه‌چاله‌های پاددوسیتته بردار چهار بُعدی را مطالعه کردیم. برای مطالعات آتی می‌توان اثر ابعاد بالاتر، که از منظر نظریه ریسمان دارای اهمیت هستند را بررسی کرد. همچنین می‌توان ارتباط بین رفتار مدهای شبه‌نرمال مربوط به انواع دیگر اختلالات، از جمله اختلال برداری و اختلال اسپینوری، را با فاز ترمودینامیکی سیاه‌چاله مورد مطالعه قرار داد. علاوه بر این، مطالعه تأثیر غیرخطی بودن الکترو دینامیک حاکم بر مدل نیز دارای اهمیت است.

تشکر و قدردانی

مهدی کردزنگنه و داود افشار از دانشگاه شهید چمران اهواز برای حمایت مالی از این مقاله تحت پژوهانه‌های شماره به ترتیب SCU.SP1402.37271 و SCU.SP1402.812 تشکر و قدردانی می‌کنند.

مرجع‌ها

[1] S.W. Hawking, Gravitational Radiation from Colliding Black Holes, Physical Review Letters, 26 (1971) 1344. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.26.1344>



شکل ۹. رفتار بسامد مدهای شبه‌نرمال برای سیاه‌چاله‌های بزرگ در حالت بحرانی. پیکان‌ها نشان‌دهنده جهت افزایش اندازه سیاه‌چاله هستند.

ما در اینجا نشان دادیم که با در نظر گرفتن نقاط دور از نقطه گذار می‌توان تفاوت رفتار مدها را مشاهده نمود و بنابراین فاز و گذار فاز را با استفاده از آن تعیین کرد.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله با در نظر گرفتن سیاه‌چاله پاددوسیتته بردار، ابتدا کمیت‌های ترمودینامیکی برای آن معرفی و سپس قانون اول ترمودینامیک برای این سیاه‌چاله نوشته شد. در ادامه، گذار فاز ترمودینامیکی سیاه‌چاله‌های بردار پاددوسیتته در فرآیند هم‌بار برای بارهای کوچکتر و مساوی بار بحرانی مورد بررسی قرار گرفت. با محاسبه انرژی آزاد گیبس و مطالعه رفتار آن برحسب دما برای بارهای کمتر از بار بحرانی توانستیم گذار فاز مرتبه اول بین سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ را مشاهده نماییم. همچنین به‌ازای بار بحرانی، گذار فاز مرتبه دوم بین سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ را مشاهده کردیم. در ادامه به حل عددی معادله کلاین-گوردون با میدان نرده‌ای حقیقی در حضور سیاه‌چاله به‌روش پرتابی پرداختیم تا بتوانیم بسامد مدهای شبه‌نرمال را به‌دست آوریم.

با مطالعه رفتار بسامدها در فازهای سیاه‌چاله‌های کوچک و بزرگ نشان دادیم که شیب نمودار قسمت موهومی برحسب قسمت حقیقی در این فازها به‌شدت متفاوت است. این تفاوت، در حالت بحرانی، برای فاز

- Physics, 11 (2012) 110.
[https://doi.org/10.1007/JHEP11\(2012\)110](https://doi.org/10.1007/JHEP11(2012)110)
- [11] A. Dehyadegari, A. Sheykhi, A. Montakhab, Critical behaviour and microscopic structure of charged AdS blackholes via an alternative phase space, Physics Letters B, 768 (2017) 23 5-240.
<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2017.02.064>
- [12] A. Dehyadegari, A. Sheykhi, Reentrant phase transition of Born-Infeld-AdS black holes, Physical Review D, 98 (2018) 024011.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.98.024011>
- [13] C.V. Vishveshwara, Scattering of gravitational radiation by a Schwarzschild black-hole, Nature, 227 (1970) 936-938.
<https://doi.org/10.1038/227936a0>
- [14] S. Chandrasekhar, S. Detweiler, The quasi-normal modes of the Schwarzschild black hole, Proceedings of the Royal Society A, 344 (1975) 441-452.
<https://doi.org/10.1098/rspa.1975.0112>
- [15] H.P. Nollert, Quasinormal modes: the characteristic sound of black holes and neutron stars, Classical and Quantum Gravity, 16 (1999) 159-216.
<https://doi.org/10.1088/0264-9381/16/12/201>
- [16] K.D. Kokkotas, B.G. Schmidt, Quasi-normal modes of stars and black holes, Living Reviews in Relativity, 2 (1999) 2.
<https://doi.org/10.12942/lrr-1999-2>
- [17] B. Wang, Perturbations around black holes, Brazilian Journal of Physics, 35 (2005) 1029-1037.
<https://doi.org/10.1590/S0103-97332005000700002>
- [18] S. Fernando, C. Holbrook, Stability and quasi normal modes of charged black holes in Born-Infeld gravity, International Journal of Theoretical Physics, 45 (2006) 1630-1645. <https://doi.org/10.1007/s10773-005-9024-9>
- [2] J.D. Bekenstein, Black Holes and Entropy, Physical Review D, 7 (1973) 2333-2346.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.7.2333>
- [3] J.M. Bardeen, B. Carter, S.W. Hawking, The four laws of black hole mechanics, Communications in Mathematical Physics, 31 (1973) 161-170.
<https://doi.org/10.1007/BF01645742>
- [4] S.W. Hawking, Particle creation by black holes, Communications in Mathematical Physics, 43 (1975) 199-220.
<https://doi.org/10.1007/BF02345020>
- [5] S.W. Hawking, D.N. Page, Thermodynamics of Black Holes in Anti-de Sitter Space, Communications in Mathematical Physics, 87 (1983) 577-588.
<https://doi.org/10.1007/BF01208266>
- [6] E. Witten, Anti-de Sitter Space, Thermal Phase Transition, And Confinement in Gauge Theories, Advances in Theoretical and Mathematical Physics, 2 (1998) 505-532.
<https://doi.org/10.4310/ATMP.1998.v2.n3.a3>
- [7] A. Chamblin, R. Emparan, C.V. Johnson, R. C. Myers, Charged AdS black holes and catastrophic holography, Physical Review D, 60 (1999) 064018.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.60.064018>
- [8] B.P. Dolan, The cosmological constant and the black hole equation of state, Classical and Quantum Gravity, 28 (2011) 125020. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/28/12/125020>
- [9] D. Kubiznak, R.B. Mann, P-V criticality of charged AdS black holes, Journal of High Energy Physics, 07 (2012) 33.
[https://doi.org/10.1007/JHEP07\(2012\)033](https://doi.org/10.1007/JHEP07(2012)033)
- [10] S. Gunasekaran, R.B. Mann, D. Kubiznak, Extended phase space thermodynamics for charged and rotating black holes and Born-Infeld vacuum polarization, Journal of High Energy

- [19] R.A. Konoplya, A. Zhidenko, Quasinormal modes of black holes: from astrophysics to string theory, *Reviews of Modern Physics*, 83 (2011) 793-836. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.83.793>
- [20] Y. Liu, D.C. Zou, B. Wang, Signature of the Van der Waals like small-large charged AdS black hole phase transition in quasinormal modes, *Journal of High Energy Physics*, 09 (2014) 179. [https://doi.org/10.1007/JHEP09\(2014\)179](https://doi.org/10.1007/JHEP09(2014)179)
- [21] S. Priyadarshinee, Quasinormal mode of dyonic hairy black hole and its interplay with phase transitions, *The European Physical Journal Plus*, 139 (2024) 258. <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-024-05044-y>
- [22] Y. Guo, H. Xie, Y.G. Miao, Signal of phase transition hidden in quasinormal modes of regular AdS black holes, *Physics Letters B*, 855 (2024) 138801. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2024.138801>
- [23] R. Arnowitt, S. Deser, C.W. Misner, Dynamical Structure and Definition of Energy in General Relativity, *Physical Review*, 116 (1959) 1322-1330. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.116.1322>
- [24] R. Arnowitt, S. Deser, C.W. Misner, Coordinate Invariance and Energy Expressions in General Relativity, *Physical Review*, 122 (1961) 997-1006. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.122.997>
- [25] R. Arnowitt, S. Deser, C.W. Misner, The Dynamics of General Relativity, *General Relativity and Gravitation*, 40 (1962) 227-264. <https://doi.org/10.1007/s10714-008-0661-1>
- [26] B.P. Dolan, Pressure and volume in the first law of black hole thermodynamics, *Classical and Quantum Gravity*, 28 (2011) 235017. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/28/23/235017>