

Thermodynamics of four-dimensional Brans-Dicke black holes in the presence of power Maxwell electrodynamics

Mohsen Dehghani*

Department of Physics, Faculty of Science, Razi University, Kermanshah, Iran

Received: 07.06.2024 Final revised: 18.10.2024 Accepted: 25.11.2024

Doi: [10.22055/jrmbms.2024.19766](https://doi.org/10.22055/jrmbms.2024.19766)

Abstract

In this study, the exact black hole (BH) solutions of Brans-Dicke (BD) theory were obtained under the influence of power-Maxwell nonlinear electrodynamics. Since the Jordan frame field equations are highly nonlinear, they cannot be solved directly. Using the conformal transformations, we translated them to the Einstein frame, where the field equations are decoupled, and the theory is the well-known Einstein-dilaton (Ed) gravity. Through solving the equations, three novel classes of Ed-power-Maxwell BHs were introduced. After calculating the thermodynamic quantities, using the appropriate approaches, we showed that the first law of BH thermodynamics is valid in the Einstein frame. Also, thermal stability of the BHs was analyzed using the canonical ensemble method. The exact BH solutions of BD-power-Maxwell theory were obtained from their Einstein correspondence by applying the inverse conformal transformations. We showed that thermodynamic quantities remain invariant under conformal transformations. As the result, thermodynamical first law is valid for the Jordan frame BHs and, their thermal stability properties are just like those of Einstein frame.

Keywords: Four-dimensional black holes, Jordan frame, Conformal transformations, Thermal stability, Nonlinear electrodynamics.

* Corresponding Author: m.dehghani@razi.ac.ir

ترمودینامیک سیاهچاله‌های برانس-دیکی چهار-بعدي در حضور الکترو دینامیک توانی ماکسول

محسن دهقانی*

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه رازی، کرمانشاه، ایران

دریافت: ۱۴۰۳/۰۳/۱۸ ویرایش نهائی: ۱۴۰۳/۰۷/۲۷ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۹/۰۵

Doi: [10.22055/jrmb.2024.19766](https://doi.org/10.22055/jrmb.2024.19766)

چکیده

در این تحقیق جواب‌های دقیق سیاهچاله‌ای در نظریه برانس-دیکی و تحت تأثیر الکترو دینامیک غیر خطی توانی ماکسول به دست آمدند. معادلات میدان در چهارچوب جوردن به شدت غیر خطی هستند و نمی‌توان آنها را به طور مستقیم حل کرد. برای رفع این مشکل، با استفاده از تبدیلات همدیس، آنها را به چهارچوب انیشتین انتقال دادیم. نظریه حاصل را انیشتین-دیلاتون می‌نامند و در آن معادلات از یکدیگر جدا شدند. از حل دقیق معادلات میدان سه دسته جدید سیاهچاله‌های انیشتین-دیلاتون-ماکسول توانی معرفی شدند. پس از محاسبه کمیت‌های ترمودینامیکی، با استفاده از روش‌های مناسب، نشان دادیم که قانون اول ترمودینامیک در چهارچوب انیشتین برقرار است. همچنین، با استفاده از روش آنسامبل کانونیک، پایداری ترمودینامیکی سیاهچاله‌ها تحلیل شد. جواب‌های سیاهچاله‌ای برانس-دیکی با استفاده از جواب‌های انیشتین-دیلاتون و با اعمال تبدیلات همدیس وارون به دست آمدند. نشان دادیم که کمیت‌های ترمودینامیکی تحت تبدیلات همدیس ناوردا می‌مانند. بر این اساس قانون اول ترمودینامیک در چهارچوب جوردن نیز برقرار است و خواص پایداری سیاهچاله‌های برانس-دیکی دقیقاً مانند سیاهچاله‌های انیشتین-دیلاتون است.

کلیدواژگان: سیاهچاله‌های چهار-بعدي، چهارچوب جوردن، تبدیلات همدیس، پایداری گرمایی، الکترو دینامیک غیر خطی

مقدمه

گرایش تعمیم یافته است که از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. زیرا از یک طرف می‌توان آن را ساده‌ترین تعمیم نظریه نسبیت عام دانست و از طرف دیگر با نظریه ریسمان در حد انرژی‌های ضعیف سازگار است [۱،۲]. نظریه برانس-دیکی نیز حالت خاصی از نظریه اسکالر-تانسور است که در سال ۱۹۶۱ توسط برانس و دیکی پایه‌گذاری شد [۳]. این نظریه تعمیمی از نظریه نسبیت عام است که اصل ماخ را نیز در بر می‌گیرد [۴]. علاوه بر این، نظریه برانس-دیکی که به کمک پارامتر ω ، معروف به پارامتر برانس-دیکی،

نسبیت عام انیشتین به‌عنوان یکی از نظریه‌های مهم قرن بیستم به‌رغم موفقیت‌های قابل توجهی که داشته در توجیه بعضی از پدیده‌های عالم ناموفق بوده است. بر این اساس دانشمندان معتقدند که این نظریه در شکل کنونی آن ناقص است و باید تکمیل شود. در این راستا یکی از روش‌هایی که در دستور کار محققین قرار گرفته توسعه این نظریه با استفاده از مدل‌های مختلف گرایش تعمیم یافته است. نظریه اسکالر-تانسور که در آن گرایش با یک میدان اسکالر جفت شده یکی از مدل‌های

* نویسنده مسئول: m.dehghani@razi.ac.ir



معرفی شده است در حد $\omega \rightarrow \infty$ با نسبت عام انیشتین سازگار است. نظریه‌های اسکالر-تانسور و برانس-دیکی بیشتر برای بررسی پدیده‌های تورم و انبساط عالم به‌عنوان مهمترین موضوعات کیهانشناسی نوین مورد استفاده قرار می‌گیرند و البته موفقیت‌هایی هم در این زمینه‌ها حاصل شده است [۸-۵].

سیاهچاله‌ها، که پیش‌بینی آنها یکی از مهمترین دستاوردهای نسبیت عام انیشتین از سال ۱۹۱۶ بوده است، از سال ۲۰۱۶ و پس از آشکارسازی امواج گرانشی توسط گروه‌های تحقیقاتی لیگو و ویرگو بیش از پیش در کانون توجه محققین قرار گرفته‌اند [۹]. بر اساس کشفیات هاوکینگ و همکاران سیاهچاله‌ها سیستم‌های ترمودینامیکی هستند که دما و آنتروپی آنها به‌عنوان کمیت‌های هندسی کاملاً مشخص می‌باشند. دمای سیاهچاله متناسب با گرانش سطحی و آنتروپی برابر با یک چهارم مساحت افق رویداد سیاهچاله است [۱۰-۱۲]. با وجود اینکه نظریه‌های اسکالر-تانسور و برانس-دیکی به‌صورت گسترده برای مطالعه مسائل کیهان مورد استفاده قرار گرفته‌اند، بررسی جواب‌های سیاهچاله‌ای آنها تا حد زیادی مغفول مانده است. سیاهچاله‌های برانس-دیکی در فضا-زمان‌های با ابعاد بالا توسط برخی از محققین مطالعه شده‌اند [۱۳، ۱۴]. اما برای مدت‌های زیادی عقیده بر این بود که جواب‌های دقیق نظریه برانس-دیکی در چهار بعد همان سیاهچاله راینر-نوردستروم است که با یک میدان اسکالر ثابت و بدیهی جفت شده است [۱۵]. در یک مقاله اخیر نشان داده شد که این عقیده فقط در حالتی درست است که پتانسیل اسکالر در این نظریه برابر با صفر فرض شود. در غیر این صورت جواب‌های سیاهچاله‌ای این نظریه با سیاهچاله راینر-نوردستروم کاملاً متفاوت است [۱۶]. در این مقاله مطالعه ویژگی‌های ترمودینامیکی سیاهچاله‌های برانس-دیکی

در چهار بعد و در حضور الکترودینامیک توانی ماکسول مورد توجه است. به این ترتیب ضمن تعمیم موضوع مرجع [۱۶] با استفاده از الکترودینامیک غیر خطی، می‌توان اثرات الکترودینامیک غیر خطی توانی را بر رفتار فیزیکی سیاهچاله‌های برانس-دیکی بررسی کرد. لازم به ذکر است که موضوع مشابهی در مراجع [۴ و ۱۷] برای حالت $(n+1)$ -بعده مطالعه شده است. اما جواب‌های معرفی شده دارای نقایصی هستند. در این مقاله، ضمن برطرف کردن نقایص، موضوع را به‌صورت دقیق و کامل در حالت چهار بعدی بررسی می‌کنیم.

الکترودینامیک کلاسیک ماکسول (یا الکترودینامیک خطی) با وجود همه موفقیت‌هایی که دارد با دو چالش عمده به‌صورت زیر مواجه است. اول اینکه فقط در فضا-زمان‌های چهار بعدی متقارن همدیس است و این تقارن در فضا-زمان‌های با ابعاد بیشتر و کمتر از چهار شکسته می‌شود. دومین چالش وجود میدان و خود-انرژی بینهایت برای ذرات باردار نقطه‌ای است. با وجود اینکه این واگرایی‌ها در الکترودینامیک کوانتومی با راهکارهای مشخصی برطرف می‌شود اما در حوزه کلاسیک مشکل همچنان وجود دارد. مدل‌های مختلف الکترودینامیک غیر خطی، که در آنها لاگرانژی یک تابع غیر خطی از ناوردای ماکسول $(\mathcal{F} = F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta})$ است، ابتدا به‌منظور غلبه بر مشکلات فوق ارائه شدند [۱۸، ۱۹]. بعضی از آنها مانند الکترودینامیک بورن-اینفلد در برطرف کردن مشکل واگرایی‌ها موفق بودند اما مدل توانی تنها مدلی از الکترودینامیک غیر خطی است که در همه فضا-زمان‌های با ابعاد دلخواه متقارن همدیس می‌ماند [۲۰، ۲۱]. امروزه مدل‌های مختلف الکترودینامیک غیر خطی، که با صرف نظر کردن از توان‌های بالاتر \mathcal{F} به الکترودینامیک خطی تبدیل می‌شوند، برای مطالعه سیاهچاله‌های باردار مورد

فرمول‌بندی کلی

برای ارائه یک فرمول‌بندی کلی، از کنش برانس-دیکی چهار-بعدی در حضور یک الکترودینامیک دلخواه به صورت زیر شروع می‌کنیم [۲۵، ۲۶]:

$$I^{(BD)} = \frac{-1}{16\pi} \int \sqrt{-\bar{g}} \left[\psi \bar{\mathcal{R}} - \frac{\omega}{\psi} (\bar{\nabla} \psi)^2 - U(\psi) + L(\bar{\mathcal{F}}) \right] d^{3+1}x, \quad ۱$$

که در آن ψ یک میدان اسکالر، \bar{g} دترمینان تانسور متریک برانس-دیکی $\bar{g}_{\mu\nu}$ ، $\bar{\mathcal{R}} = \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\mathcal{R}}_{\mu\nu}$ اسکالر ریچی، ω پارامتر برانس-دیکی، $\bar{\nabla}$ عملگر مشتق هموردا، $U(\psi)$ پتانسیل اسکالر و $L(\bar{\mathcal{F}})$ لاگرانژی الکترودینامیک مورد نظر به صورت تابعی از ناوردای ماکسول $\bar{\mathcal{F}} = \bar{F}^{\mu\nu} \bar{F}_{\mu\nu}$ است. تانسور $\bar{F}_{\mu\nu}$ برحسب چهار-بردار \bar{A}_μ به صورت $\bar{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \bar{A}_\nu - \partial_\nu \bar{A}_\mu$ تعریف می‌شود. در اینجا لاگرانژی الکترودینامیک غیر خطی توانی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$L(\bar{\mathcal{F}}) = (-\bar{\mathcal{F}})^p \quad ۲$$

که در آن توان p پارامتر غیر خطی نامیده می‌شود. از وردش کنش ۱ نسبت به میدان‌های مختلف معادلات مربوطه به صورت زیر به دست می‌آیند [۱۶]:

$$(2\omega + 3) \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}^\alpha \psi = \psi \partial_\psi U(\psi) - 2U(\psi), \quad ۴$$

$$\bar{\nabla}_\mu \left[L'(\bar{\mathcal{F}}) \bar{F}^{\mu\nu} \right] = 0$$

$$\psi \bar{G}_{\mu\nu} = (\bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu - \bar{g}_{\mu\nu} \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}^\alpha) \psi + \bar{T}^{(\psi)}_{\mu\nu} + \bar{T}^{(A)}_{\mu\nu}, \quad ۵$$

که در آن پریم نشان دهنده مشتق نسبت به شناسه، $\bar{G}_{\mu\nu}$ تانسور انیشتین، $\bar{T}^{(A)}_{\mu\nu}$ و $\bar{T}^{(\psi)}_{\mu\nu}$ به ترتیب تانسورهای انرژی-تکانه میدان‌های اسکالر و الکترومغناطیسی هستند.

$$\bar{T}^{(\psi)}_{\mu\nu} = \frac{\omega}{\psi} \bar{\nabla}_\mu \psi \bar{\nabla}_\nu \psi - \frac{\bar{g}_{\mu\nu}}{2} \left[U(\psi) + \frac{\omega}{\psi} (\bar{\nabla} \psi)^2 \right] \quad ۶$$

استفاده قرار می‌گیرند [۲۲-۲۴]. در حالتی که میدان‌های الکترومغناطیسی به اندازه کافی قوی باشند توان‌های بالاتر \mathcal{F} اهمیت بیشتری دارند و نمی‌توان از آنها صرف نظر کرد. بنابراین استفاده از الکترودینامیک غیر خطی برای مطالعه سیاهچاله‌های باردار، که احتمالاً میدان‌های قوی تولید می‌کنند، می‌تواند توصیف واقعی‌تری از ویژگی‌های سیاهچاله‌ها ارائه کند. در این مقاله رفتار سیاهچاله‌های چهار بعدی برانس-دیکی را در حضور الکترودینامیک توانی بررسی می‌کنیم. مطالب این مقاله به صورت زیر تنظیم شده‌اند:

ابتدا فرمول‌بندی کلی نظریه را در چهارچوب جوردن معرفی کرده و نشان می‌دهیم که با توجه به جفت شدگی معادلات حرکت نمی‌توان آنها را به صورت مستقیم حل کرد. برای رفع این مشکل، با استفاده از تبدیلات همدیس، کنش برانس-دیکی را به چهارچوب انیشتین منتقل می‌کنیم جایی که معادلات ساده‌تر حل می‌شوند و نظریه گرانشی را انیشتین-دیلاتون می‌نامند. جواب‌های دقیق این نظریه را به دست آورده، کمیت‌های ترمودینامیکی را محاسبه و علاوه بر بررسی درستی قانون اول ترمودینامیک پایداری ترمودینامیکی سیاهچاله‌های انیشتین-دیلاتون را در روش آنسامبل کانونیک تحلیل می‌کنیم. سپس سیاهچاله‌های باردار برانس-دیکی را با اعمال تبدیلات همدیس و ارون بر روی جواب‌های به دست آمده در چهارچوب انیشتین معرفی، ویژگی‌های ترمودینامیکی آنها را مطالعه و با سیاهچاله‌های دیلاتونی مقایسه می‌کنیم. نتایج حاکی از آن است که ویژگی‌های ترمودینامیکی سیاهچاله‌های معرفی شده در چهارچوب‌های جوردن و انیشتین یکسان است.

$$\psi = e^{2\alpha\phi}, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{3+2\omega}}, \quad \Omega = e^{-\alpha\phi}. \quad ۱۴$$

در این صورت:

$$U(\phi) = V(\phi) e^{4\alpha\phi}, \quad ۱۵$$

$$L(\mathcal{F}, \phi) = e^{2\delta\phi} (-\mathcal{F})^p, \quad ۱۶$$

که در آن $\delta = 2(p-1)\alpha$ و به ازای $p = 1$ معادله ۱۶ الکتروودینامیک متقارن همدیس ماکسول را نتیجه می‌دهد. توجه شود که $L(\mathcal{F}, \phi)$ به دست آمده با آنچه که در کارهای پیشین آمده است اندکی متفاوت است [۱۷].

جواب‌های سیاهچاله‌ای در چهارچوب

انیشتین

از وردش کنش ۱۳ نسبت به میدان‌های مختلف، معادلات حرکت به صورت زیر به دست می‌آیند [۱۷]:

$$\nabla_\mu [\partial_{\mathcal{F}} L(\mathcal{F}, \phi) F^{\mu\nu}] = 0 \quad ۱۷$$

$$4\nabla_\alpha \nabla^\alpha \phi = \frac{dV(\phi)}{d\phi} - \partial_\phi L(\mathcal{F}, \phi) \quad ۱۸$$

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = 2\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} [V(\phi) - L(\mathcal{F}, \phi) + 2\mathcal{F} \partial_{\mathcal{F}} L(\mathcal{F}, \phi)] - 2\partial_{\mathcal{F}} L(\mathcal{F}, \phi) F_{\mu\lambda} F_\nu^\lambda. \quad ۱۹$$

برای حل معادلات فوق از یک متریک متقارن کروی به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + f(r)^{-1} dr^2 + r^2 R(r)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad ۲۰$$

که در آن $f(r)$ و $R(r)$ باید به صورت توابعی از r تعیین شوند. توجه شود که $R(r)$ یک تابع بدون بعد و نشان دهنده اثرات میدان دیلاتون بر روی هندسه است. با قرار دادن $R(r) = 1$ معادله ۲۰ به متریک متقارن کروی در گرانش انیشتین تقلیل می‌یابد. در این متریک مؤلفه‌های میدان گرانش ۱۹ به صورت زیر در می‌آیند:

$$C_{tt} = f''(r) + 2\left(\frac{1}{r} + \frac{R'}{R}\right) f'(r) + V(\phi) - L(\mathcal{F}, \phi) = 0, \quad ۲۱$$

$$\bar{T}^{(A)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} L(\bar{\mathcal{F}}) - 2\partial_{\mathcal{F}} L(\bar{\mathcal{F}}) \bar{F}_{\mu\lambda} \bar{F}_\nu^\lambda. \quad ۷$$

معادلات ۳ تا ۵ را به ترتیب معادلات میدان‌های اسکالر، الکترومغناطیسی و گرانشی می‌نامند. این معادلات غیر خطی و جفت شده هستند و نمی‌توان آنها را به صورت مستقیم حل کرد. به همین دلیل با استفاده از تبدیلات همدیس، کنش ۱ را که در چهارچوب جوردن نوشته شده است به چهارچوب انیشتین منتقل می‌کنیم. تبدیلات همدیس یک ابزار ریاضی است که به صورت زیر بیان می‌شود [۲۷]:

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}. \quad ۸$$

که در آن ضریب Ω تابعی از مختصات است. همچنین فرض می‌کنیم $\bar{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$ ، یعنی تانسور هموردای فارادی تحت تبدیلات همدیس ناوردا می‌ماند. تحت تبدیلات همدیس داریم [۲۷]:

$$\bar{\mathcal{R}} = \Omega^{-2} \mathcal{R} - 6\Omega^{-3} \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}^\alpha \Omega, \quad ۹$$

$$\cdot \sqrt{-\bar{g}} = \Omega^4 \sqrt{-g} \quad ۱۰$$

و با اعمال قیده‌های زیر:

$$V(\phi) = \Omega^4 U(\psi), \quad \Omega = \frac{1}{\sqrt{\psi}}, \quad ۱۱$$

$$\left[6\psi \left(\frac{d\Omega}{d\psi} \right)^2 + \frac{\omega}{\psi^2} \right] \left(\frac{d\psi}{d\phi} \right)^2 = 2, \quad ۱۲$$

که در آن ψ به صورت تابعی از ϕ (یک میدان اسکالر در هندسه $g_{\mu\nu}$) در نظر گرفته شده است، کنش ۱ را می‌توان به صورت زیر نوشت [۱۷، ۲۸]:

$$I^{(Ed)} = \frac{-1}{16\pi} \int \sqrt{-g} [\mathcal{R} - 2(\nabla\phi)^2 - V(\phi) + L(\mathcal{F}, \phi)] d^{3+1}x, \quad ۱۳$$

رابطه فوق همان کنش انیشتین-دیلاتون است که در آن $L(\mathcal{F}, \phi) = \Omega^4 L(\Omega^{-4}\mathcal{F})$ لاگرانژی الکتروودینامیک جفت شده با میدان اسکالر است. از حل معادله ۱۲ و با توجه به معادله ۱۱ داریم:

به‌ازای $p = 1$ شرط فوق به‌صورت $\beta^2 < 1$ در می‌آید [۱۶]. اینک با استفاده از معادله ۲۵ در معادلات ۱۸ و ۲۳ پس از انجام محاسبات جبری داریم:

$$f'(r) + \frac{1-2\beta\gamma}{r} f(r) = \frac{r}{2(1-\beta\gamma)} \left[\frac{2}{r^2 R^2} - V(\phi) - (2p-1)L(\mathcal{F}, \phi) \right], \quad 29$$

$$\frac{dV(\phi)}{d\phi} - 2\beta V(\phi) + \frac{4\beta}{r^2} e^{-2\beta\phi(r)} - \frac{2\lambda(2q^2)^p e^{2\delta\phi}}{[r^2 R^2 e^{2\delta\phi}]^{2p-1}} = 0, \quad 30$$

که در آن $\lambda = \delta + (2p-1)\beta$ است.

از حل معادله ۳۰ و پس از تعیین ثابت انتگرال‌گیری با استفاده از شرط $V(\phi = 0) = 2\Lambda$ داریم:

$$V(\phi) = 2\Lambda e^{2\beta\phi} + 2\Lambda_1 e^{2\beta_1\phi} + 2\Lambda_2 e^{2\beta_2\phi}, \quad \beta \neq 1, \quad 31$$

که در آن

$$\beta_1 = \frac{1}{\beta}, \beta_2 = \frac{2p-\delta\beta}{\beta(2p-1)}, \Lambda_1 = \frac{\beta^2}{b^2(\beta^2-1)}$$

$$\Lambda_2 = \frac{\lambda(2q^2)^p}{2(\beta_2 - \beta)b^{4p/(2p-1)}}$$

همچنین می‌توان نشان داد:

$$V(\phi) = 2\Lambda_{eff} e^{2\phi} - \frac{4\phi}{b^2} e^{2\phi} + 2\Lambda_3 e^{2\beta_3\phi}, \beta = 1$$

که در آن

$$\Lambda_3 = \frac{(\delta+2p-1)(2q^2)^p}{2(\beta_3-1)b^{4p/(2p-1)}}, \beta_3 = \frac{2p-\delta}{2p-1}$$

در معادلات فوق Λ ثابت کیهانشناسی و Λ_{eff} همان Λ است که یک ثابت در آن جذب شده است به‌طوری که $\Lambda_{eff} = \Lambda - \Lambda_3$. توجه شود که پتانسیل اسکالر داده شده در معادلات ۳۱ و ۳۲ در حالت $p = 1$ با نتایج مرجع [۱۶] سازگار است.

$$C_{rr} = C_{tt} + 4 \left(\phi'^2 + \frac{R''}{R} + \frac{2R'}{rR} \right) f = 0, \quad 22$$

$$C_{\theta\theta} = C_{\varphi\varphi} = 2 \left(\frac{1}{r} + \frac{R'}{R} \right) f' + V(\phi) + 2 \left(\frac{1}{r^2} + \frac{4R'}{rR} + \frac{R'^2}{R^2} + \frac{R''}{R} \right) f - \frac{2}{r^2 R^2} + (2p-1)L(\mathcal{F}, \phi) = 0. \quad 23$$

تنها مؤلفه غیر صفر تانسور فارادی را می‌توان، برحسب ثابت انتگرال‌گیری q ، از حل معادله ۱۷ به‌دست آورد:

$$F_{tr} = \frac{q}{[r^2 R^2 e^{2\delta\phi}]^{2p-1}}, \quad p \neq \frac{1}{2}. \quad 24$$

می‌توان نشان داد که معادلات ۲۱ و ۲۳ مستقل نیستند

[۲۹]. این بدان معناست که: اولاً جواب معادله ۲۳ در

معادله ۲۱ صدق می‌کند و نیازی به‌حل این معادله درجه دوم نیست. ثانیاً تعداد معادلات مستقل ۴ و تعداد مجهولات ۵ است. برای حل این مشکل $R(r)$ را برحسب ثابت β به‌صورت نمایی انتخاب می‌کنیم:

$$R(r) = e^{\beta\phi(r)}. \quad 25$$

توجه شود که این انتخاب اندکی با کارهای قبلی متفاوت است [۱۷]. در این صورت با توجه به‌معادلات ۲۱ و ۲۲ داریم:

$$\phi(r) = \gamma \ln \left(\frac{b}{r} \right), \quad 26$$

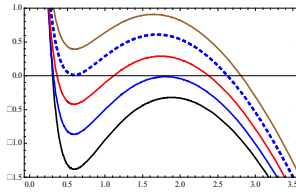
که در آن b یک ثابت مثبت و $\gamma = \beta(1 + \beta^2)^{-1}$ است.

با توجه به معادله ۱۴ داریم $\psi = \left(\frac{b}{r} \right)^{2\alpha\gamma}$ و میدان اسکالر فیزیکی در بینهایت صفر می‌شود. همچنین با استفاده از رابطه $F_{tr} = -\partial_r A_t(r)$ می‌توان نشان داد:

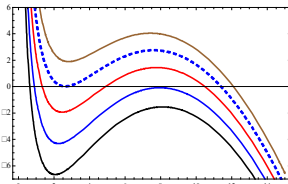
$$A_t(r) = -\frac{(2p-1)qr^{2p-1}}{2p-3+2(\beta+\delta)\gamma} \left(\frac{r}{b} \right)^{\frac{2(\beta+\delta)\gamma}{2p-1}} \quad 27$$

بنابراین شرط لازم برای آنکه پتانسیل الکتریکی در بینهایت صفر شود عبارت است از:

$$\frac{2p-3+2(\beta+\delta)\gamma}{2p-1} < 0. \quad 28$$



شکل ۳. نمودار $f(r)$: $\alpha = 1$, $b = 0.55$, $\beta = 1$, $m = 8$, $q = 0.5$. $\Lambda_{eff} = -1$ از پایین به بالا. $p = 0.78, 0.816, 0.84, 0.854, 0.865$



شکل ۴. نمودار $f(r)$: $\alpha = 1$, $b = 1.2$, $\beta = \sqrt{3}$, $m = 3$, $L = 4$. $\Lambda = -3$ از پایین به بالا. $p = 5.5, 6, 6.5, 6.91, 7.3$

نمودارها نشان می‌دهند که در حالت $\beta \neq 1, \sqrt{3}$ سیاهچاله‌های با دو افق رویداد، اکستریم و بدون افق رویداد وجود خواهند داشت. در حالت‌های $\beta = 1$ و $\beta = \sqrt{3}$ علاوه بر موارد فوق سیاهچاله‌های چند افقی نیز پیش‌بینی می‌شوند.

کمیت‌های ترمودینامیکی و قانون اول

برای بررسی درستی قانون اول ترمودینامیک لازم است ابتدا کمیت‌های ترمودینامیکی محاسبه شوند. دما در افق رویداد یکی از این کمیت‌هاست که با استفاده از مفهوم گرانش سطحی به صورت $T = \frac{f'(r_+)}{4\pi}$ محاسبه می‌شود [۳۰]:

$$T = \frac{1+\beta^2}{4\pi r_+} \left[\frac{1}{1-\beta^2} \left(\frac{r_+}{b} \right)^{2\beta\gamma} - \Lambda r_+^2 \left(\frac{b}{r_+} \right)^{2\beta\gamma} - \frac{p(2p-1)(2q^2)^p}{(2p-\beta\lambda)b^{2/2p-1}} \left(\frac{b}{r_+} \right)^{\Gamma-2} \right], \beta \neq 1 \quad (36)$$

$$T = \frac{1}{2\pi b} \left[1 - \Lambda_{eff} b^2 + \ln \left(\frac{b}{r_+} \right) - \frac{p(2p-1)(2q^2)^p}{(1-\delta)b^{2/2p-1}} \left(\frac{b}{r_+} \right)^{\beta_3-1} \right], \beta = 1 \quad (37)$$

و در حالت $p = 1$ به نتایج مرجع [۱۶] تبدیل می‌شوند. برای جرم سیاهچاله با توجه به روش برون-یورک داریم [۱۶, ۱۷, ۳۱]:

از ترکیب معادلات ۳۱ و ۳۲ با ۲۹ و حل معادله دیفرانسیل حاصل برای $f(r)$ داریم:

$$f(r) = \frac{-m}{r^{1-2\beta\gamma}} - \Gamma_1 \Lambda b^2 \left(\frac{r}{b} \right)^{2-2\beta\gamma} + \Gamma_2 \left(\frac{r}{b} \right)^{2\beta\gamma} - \Gamma_3 \left(\frac{b}{r} \right)^{\Gamma-2}, \beta \neq 1, \sqrt{3} \quad (33)$$

$$f(r) = -m + \frac{2r}{b} \left[2 + \ln \left(\frac{b}{r} \right) \right] - 2\Lambda_{eff} b r - \eta \left(\frac{b}{r} \right)^{\beta_3-2}, \beta = 1 \quad (34)$$

$$f(r) = -m r^{1/2} - 4\Lambda b^{3/2} r^{1/2} \ln \left(\frac{r}{L} \right) - 2 \left(\frac{r}{b} \right)^{3/2} - \Gamma_3(\sqrt{3}) \left(\frac{b}{r} \right)^{\Gamma(\sqrt{3})-2}, \beta = \sqrt{3} \quad (35)$$

که در آن m ثابت انتگرال‌گیری، L یک ثابت ابعادی و

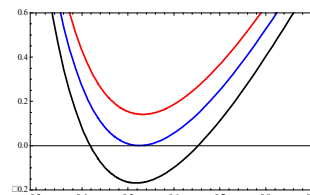
$$\Gamma_1 = \frac{(1+\beta^2)^2}{3-\beta^2}, \quad \Gamma_2 = \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2},$$

$$\eta = \frac{2p(2p-1)(2q^2)^p b^{2p-1}}{(2-\beta_3)(1-\delta)}$$

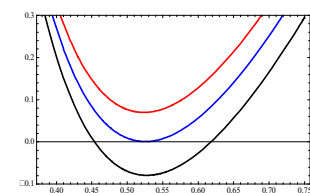
$$\Gamma(\beta) = 2\delta\gamma + \frac{4p}{2p-1} [1 - (\beta + \delta)\gamma],$$

$$\Gamma_3(\beta) = \frac{p(2p-1)(1+\beta^2)(2q^2)^p b^{2p-1}}{(3-2\beta\gamma-\Gamma)[2p-\delta\beta-\beta^2(2p-1)]}.$$

توابع متریک داده شده در معادلات ۳۳ و ۳۴ در حالت $p = 1$ با نتایج مرجع [۱۶] سازگارند. معادله ۳۵ مشابهی در مرجع [۱۶] ندارد؛ زیرا $\beta = \sqrt{3}$ در محدوده مجاز نیست. نمودار $f(r)$ در شکل‌های ۱ تا ۴ رسم شده است.



شکل ۱. نمودار $f(r)$: $\alpha = 1$, $b = 1.4$, $\beta = 0.46$, $m = 3$, $q = 1$. $\Lambda = -3$ از پایین به بالا. $p = 0.947, 0.9572, 0.965$



شکل ۲. نمودار $f(r)$: $\alpha = 1$, $b = 1.4$, $p = 0.9572$, $m = 3$. $\Lambda = -3$ و ۱ از پایین به بالا. $\beta = 0.448, 0.46, 0.47$

$$M(r_+, q) = -\frac{r_+}{4} - \frac{4b^3}{2} \ln\left(\frac{r_+}{L}\right) - \frac{r_+ \Gamma_3(\sqrt{3})}{8} \left(\frac{b}{r_+}\right)^{\Gamma(\sqrt{3})-1/2}, \quad \beta = \sqrt{3} \quad 45$$

با توجه به معادلات ۴۰ و ۴۱ می‌توان جرم سیاهچاله را به صورت تابعی از بار و آنتروپی سیاهچاله در نظر گرفت. با استفاده از معادلات فوق داریم:

$$\frac{\partial M}{\partial S} = T, \quad \frac{\partial M}{\partial Q} = \Phi, \quad 46$$

به شرط آن که ثابت داده شده در معادله ۴۲ به صورت زیر تعیین گردد:

$$c = \frac{2p^2}{2p-\beta\lambda}, \quad \beta = 1 \quad \text{و} \quad \beta \neq 1 \quad 47$$

که با مقدار به دست آمده در مرجع [۱۶] سازگار است. بنابراین، قانون اول ترمودینامیک، برای هر سه دسته سیاهچاله‌های دیلاتونی، به صورت زیر برقرار است:

$$dM = TdS + \Phi dQ. \quad 48$$

تحلیل پایداری در روش آنسامبل کانونیک

در روش آنسامبل کانونیک می‌توان، با توجه به علامت ظرفیت گرمایی، پایداری ترمودینامیکی سیاهچاله‌ها را بررسی کرد. ظرفیت گرمایی با رابطه زیر داده می‌شود:

$$C_Q = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_Q = \frac{T}{M_{SS}}, \quad 49$$

که در آن $M_{SS} = \left(\frac{\partial^2 M}{\partial S^2}\right)_Q$ در آخرین مرحله ۴۹ از معادله ۴۶ استفاده شده است. می‌توان نشان داد:

$$M_{SS} = \frac{1}{2\pi^2 b^2 r_+} \left[\frac{p(2q^2)^p}{b^{2/(2p-1)}} \left(\frac{b}{r_+}\right)^{\beta_3-1} - 1 \right] \quad \beta = 1 \quad 50$$

$$M_{SS} = -\frac{1+\beta^2}{8\pi^2 r_+^3} \left[\left(\frac{r_+}{b}\right)^{4\beta\gamma} + (1-\beta^2)\Lambda r_+^2 + \Gamma_4 \left(\frac{b}{r_+}\right)^{\Gamma-2\beta\gamma-2} \right], \quad \beta \neq 1 \quad 51$$

که در آن $\Gamma_4 = \Gamma_3(\Gamma-1)(\Gamma-3+2\beta\gamma)$. توجه شود که مقادیر داده شده در معادلات ۵۰ و ۵۱ در حالت $p=1$ با نتایج مرجع [۱۶] سازگار است.

$$M = m \frac{b^{2\beta\gamma}}{2(1+\beta^2)}, \quad 38$$

و برای محاسبه بار الکتریکی سیاهچاله با استفاده از قانون گاوس به صورت زیر:

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int r^2 R^2 e^{2\delta\phi} (2F_{tr}^2)^{p-1} F^{tr} d\Omega \quad 39$$

می‌توان نشان داد:

$$Q = 2^{p-1} q^{2p-1}, \quad 40$$

که با نتیجه مرجع [۱۷] یکسان و در حالت $p=1$ با مقدار به دست آمده در مرجع [۱۶] سازگار است. به کمک قانون آنتروپی مساحت برای آنتروپی داریم [۳۲]:

$$S = \pi r_+^2 \left(\frac{b}{r_+}\right)^{2\beta\gamma}, \quad 41$$

که در حالت $\beta=0$ به رابطه آشنای آنتروپی در گرانش انیشتین تبدیل می‌شود. با استفاده از رابطه ۲۷ می‌توان نشان داد که پتانسیل الکتریکی بر روی افق سیاهچاله، نسبت به یک مرجع واقع در بینهایت، به صورت زیر است [۱۷]:

$$\Phi(r_+) = -\frac{c(2p-1)qr^{2p-1}}{2p-3+2(\beta+\delta)\gamma} \left(\frac{r}{b}\right)^{\frac{2(\beta+\delta)\gamma}{2p-1}}, \quad 42$$

که در آن c یک ضریب ثابت است و باید مقدار آن تعیین شود.

با اعمال شرط $f(r_+) = 0$ در معادلات ۳۳ تا ۳۵ می‌توان $m(r_+, q)$ را محاسبه و از ترکیب آن با معادله ۳۸ جرم سیاهچاله را به صورت زیر نوشت:

$$M(r_+, q) = \frac{r_+}{2(1-\beta^2)} - \frac{(1+\beta^2)\Lambda r_+^3}{2(3-\beta^2)} \left(\frac{b}{r_+}\right)^{4\beta\gamma} - \frac{r_+ \Gamma_3}{2(1+\beta^2)} \left(\frac{b}{r_+}\right)^{\Gamma+2\beta\gamma-2}, \quad \beta \neq 1, \sqrt{3} \quad 43$$

$$M(r_+, q) = \frac{r_+}{2} \left[2 + \ln\left(\frac{b}{r_+}\right) - \Lambda_{eff} b^2 - \frac{\eta}{2} \left(\frac{b}{r_+}\right)^{\beta_3-1} \right], \quad \beta = 1 \quad 44$$

نمودارهای این حالت، برای اجتناب از تکرار، نشان داده نشده‌اند.

ترمودینامیک سیاهچاله‌های برانس-دیکی

تا کنون به بررسی سیاهچاله‌های دیلاتونی (در چهارچوب انیشتین) پرداخته‌ایم. اینک با استفاده از تبدیلات همدیس وارون، نتایج به دست آمده را به چهارچوب جوردن انتقال داده و به بررسی سیاهچاله‌های برانس-دیکی می‌پردازیم. برای این منظور از متریک برانس-دیکی به صورت زیر شروع می‌کنیم:

$$ds^2 = \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -A(r)dt^2 + \frac{dr^2}{B(r)} + r^2 H(r)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad 52$$

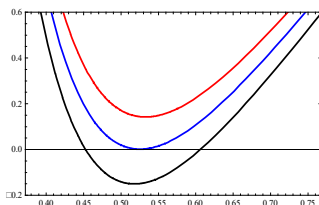
با استفاده از معادلات ۸ و ۱۴ داریم:

$$A(r) = \Omega^2 f(r) = e^{-2\alpha\phi} f(r), \quad 53$$

$$B(r) = \Omega^{-2} f(r) = e^{2\alpha\phi} f(r), \quad 54$$

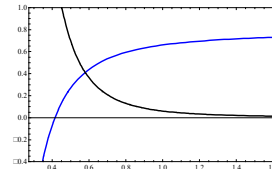
$$H(r) = \Omega R(r) = e^{-\alpha\phi} R(r), \quad 55$$

توجه شود که $R(r)$ و $f(r)$ به ترتیب در معادلات ۲۵، ۳۳ تا ۳۵ داده شده‌اند و ϕ نیز مطابق رابطه ۲۶ تابعی از r است. برای نشان دادن وجود و تعداد شعاع‌های افق رویداد نمودار $B(r)$ در شکل‌های ۸ تا ۱۱ رسم شده‌اند. نمودارها وجود سیاهچاله‌های بدون افق رویداد، اکستریم، دارای دو و سه افق رویداد را تأیید می‌کنند.

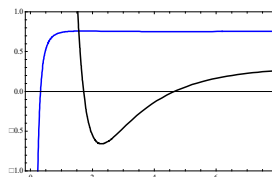


شکل ۸. نمودار $B(r)$: $\beta = 0.46$, $b = 1.4$, $\alpha = 1$, $m = 3$, $q = 1$ و $\Lambda = -3$ از پایین به بالا. $p = 0.953, 0.9572, 0.961$

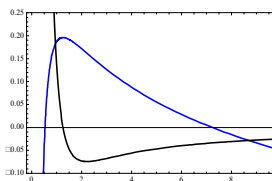
برای تحلیل پایداری سیاهچاله‌های دیلاتونی فیزیکی، نمودارهای T و M_{SS} به صورت همزمان در شکل‌های ۵ تا ۷ رسم شده‌اند.



شکل ۵. نمودار $M_{SS}(r_+)$ (سیاه) و $T(r_+)$ (آبی): $\beta = 0.8$, $b = 1$, $p = 0.85$ و $q = 1$, $\Lambda = -3$, $\alpha = 1$



شکل ۶. نمودار $500 M_{SS}(r_+)$ (سیاه) و $T(r_+)$ (آبی): $\beta = 0.8$, $p = 0.85$ و $q = 0.5$, $\Lambda = -3$, $\alpha = 1$, $b = 0.6$



شکل ۷. نمودار $5 M_{SS}(r_+)$ (سیاه) و $T(r_+)$ (آبی): $b = 1$, $\beta = 1$, $p = 0.85$ و $q = 1$, $\Lambda_{eff} = -1$, $\alpha = 1$

شکل ۵ نشان می‌دهد فقط یک گذار فاز نوع اول در $r_+ = r_{ext}$ وجود دارد و سیاهچاله‌های با افق رویداد بزرگتر از آن پایدارند. با توجه به نمودار شکل ۶ یک گذار فاز نوع اول در $r_+ = r_{ext}$ و دو گذار فاز نوع دوم در $r_+ = r_1$ و $r_+ = r_2$ وجود دارند. سیاهچاله‌هایی که شعاع افق آنها در بازه‌های $r_1 < r_+ < r_{ext}$ و $r_{ext} < r_+ < r_2$ قرار دارد پایدارند. بر اساس نمودار شکل ۷، یک گذار فاز نوع دوم $r_+ = r_3$ و در دو گذار فاز نوع دوم در شعاع‌های $r_+ = r_{1ext}$ و $r_+ = r_{2ext}$ وجود دارند. سیاهچاله‌هایی که شعاع افق آنها در بازه $r_{ext1} < r_+ < r_3$ قرار دارد پایدارند. نمودارهای $M_{SS}(r_+)$ و $T(r_+)$ برای حالت $\beta = \sqrt{3}$ بسیار شبیه به شکل‌های ۵ و ۶ است. به همین دلیل

که با توجه به معادلات ۵۳ و ۵۴ نتیجه می‌دهد:

$$\bar{Q} = Q. \quad ۶۰$$

معادله ۶۰ نشان می‌دهد که بار الکتریکی سیاهچاله تحت تبدیلات همدیس ناوردا می‌ماند. همچنین می‌توان نشان داد جرم و آنتروپی سیاهچاله نیز تحت تبدیلات همدیس ناوردا می‌مانند [۱۳، ۱۴]. یعنی $\bar{M} = M$ و $\bar{S} = S$ و مقادیر آنها به ترتیب با معادلات ۳۸ و ۴۱ داده می‌شود. از آنجایی که F_{tr} نیز تحت تبدیلات همدیس ناورداست، پتانسیل الکتریکی سیاهچاله‌های جوردن نیز با معادله ۴۲ داده می‌شود و این کمیت نیز ناورداست.

بنابراین با تعیین مقدار C طبق معادله ۴۷، داریم:

$$\frac{\partial \bar{M}}{\partial \bar{S}} = \bar{T}, \quad \frac{\partial \bar{M}}{\partial \bar{Q}} = \bar{\Phi}, \quad ۶۱$$

و قانون اول ترمودینامیک به صورت:

$$d\bar{M} = \bar{T}d\bar{S} + \bar{\Phi}d\bar{Q}, \quad ۶۲$$

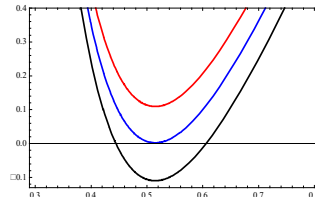
برای سیاهچاله‌های جوردن نیز برقرار است. اینک به منظور بررسی پایداری سیاهچاله‌ها در چهارچوب جوردن، ظرفیت گرمایی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{C}_{\bar{Q}} = \bar{T} \left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{T}} \right)_{\bar{Q}} = \frac{\bar{T}}{\bar{M}_{SS}}, \quad ۶۳$$

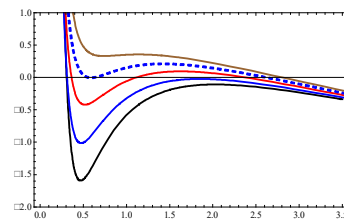
و با توجه به ناوردایی دما، آنتروپی و جرم که در بالا به آن اشاره شد، داریم $\bar{C}_{\bar{Q}} = C_Q$. بنابراین، از دیدگاه پایداری یا گذار فاز نیز سیاهچاله‌های انیشتین و جوردن رفتار یکسانی دارند.

بحث و نتیجه‌گیری

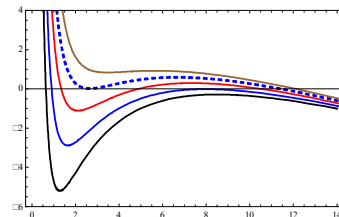
در این مقاله به منظور بررسی ترمودینامیک سیاهچاله‌های برانس-دیکی در حضور الکتروستاتیک غیر خطی، به عنوان تعمیم کاری که در مرجع [۱۶] و با استفاده از الکتروستاتیک خطی ماکسول انجام شده است، ابتدا معادلات حرکت را از وردش کنش مربوطه در چهارچوب جوردن و در حضور الکتروستاتیک توانی ماکسول به دست آوردیم. معادلات به دست آمده



شکل ۹. نمودار $B(r)$: $\alpha = 1$, $b = 1.4$, $p = 0.9572$, $m = 3$, $q = 1$ و $\Lambda = -3$ از $\beta = 0.448, 0.46, 0.47$ از پایین به بالا.



شکل ۱۰. نمودار $B(r)$: $\beta = 1$, $b = 0.55$, $m = 8$, $q = 0.5$ و $\Lambda_{eff} = -1$ از $p = 0.78, 0.816, 0.84, 0.854, 0.865$ از $\alpha = 1$ از پایین به بالا.



شکل ۱۱. نمودار $f(r)$: $\beta = \sqrt{3}$, $b = 1.2$, $m = 3$, $L = 4$ و $\Lambda = -3$ از $p = 5.5, 6, 6.5, 6.91, 7.3$ از پایین به بالا. دمای سیاهچاله با توجه به متریک ۵۲ با رابطه زیر داده می‌شود

$$\bar{T} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{B(r_+)}{A(r_+)}} \left(\frac{dA(r)}{dr} \right)_{r=r_+}, \quad ۵۶$$

و با استفاده از معادلات ۵۳ و ۵۴ داریم:

$$\bar{T} = \frac{1}{4\pi} \left[\Omega^{-2} \frac{d}{dr} (\Omega^2 f(r)) \right]_{r=r_+} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{df(r)}{dr} + \Omega^{-2} f(r) \frac{d}{dr} (\Omega^2) \right]_{r=r_+} = \frac{f'(r_+)}{4\pi} = T. \quad ۵۸$$

توجه شود که در محاسبات فوق از شرط $f(r_+) = 0$ استفاده شده است. معادله ۵۸ نشان می‌دهد که دمای سیاهچاله تحت تبدیلات همدیس ناوردا می‌ماند. بار سیاهچاله نیز به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\bar{Q} = \frac{1}{4\pi} \int r^2 H^2 \sqrt{\frac{A(r)}{B(r)}} (2\bar{F}_{tr}^2)^{p-1} \bar{F}_{tr} d\Omega$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int r^2 \Omega^2 R^2 \sqrt{\frac{B(r)}{A(r)}} (2F_{tr}^2)^{p-1} F_{tr} d\Omega \quad ۵۹$$

چهارچوب جوردن نشان دادیم که این کمیت‌ها تحت تبدیلات همدیس ناوردا می‌مانند. به‌علاوه نشان دادیم قانون اول ترمودینامیک در مورد سیاهچاله‌های برانس-دیکی نیز برقرار است. در مبحث پایداری ترمودینامیکی سیاهچاله‌ها، با محاسبه ظرفیت گرمایی نشان دادیم که این کمیت نیز بدون تغییر می‌ماند و بر این اساس نتیجه گرفتیم که سیاهچاله‌های معرفی شده در چهارچوب‌های جوردن و انیشتین دارای خواص پایداری و گذار فاز یکسانی هستند. در پایان، تعمیم موضوع این مقاله به ابعاد بالاتر در کار بعدی پیشنهاد می‌شود.

مرجع‌ها

- [1] M.B. Green, J.H. Schwarz, E. Witten, *Superstring Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, (1987).
- [2] G.W. Gibbons, K. Maeda, Black holes and membranes in higher-dimensional theories with dilaton fields, *Nuclear Physics B*, 298 (1988) 741. [doi.org/10.1016/0550-3213\(88\)90006-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(88)90006-5).
- [3] C. Brans, R. Dicke, Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation, *Physical Review*, 124 (1961) 925. doi.org/10.1103/PhysRev.124.925.
- [4] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley, New York, (1972).
- [5] S. Nojiri, G.G.L. Nashed, Stable gravastar with large surface redshift in Einstein's gravity with two scalar fields, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2024 (03) (2024) 023. doi.org/10.1088/1475-7516/2024/03/023.
- [6] S. Nojiri, S.D. Odintsov, A. Sedrakian, Extremely small stars in scalar-tensor gravity: when stellar radius is less than Schwarzschild one, *Nuclear Physics B*, (2024) 116628. doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2024.116628.

غیر خطی و جفت شده هستند به‌طوری که پیدا کردن جواب تحلیلی آنها بسیار مشکل است. برای رفع این مشکل، با استفاده از تبدیلات همدیس، کنش جوردن را به چهارچوب انیشتین منتقل کردیم. در این چهارچوب نظریه گرانشی را انیشتین-دیلاتون می‌نامند و معادلات حرکت نیز ساده‌تر حل می‌شوند. از حل این معادلات در یک متریک متقارن کروی جواب‌های دقیق سیاهچاله‌ای دیلاتونی جدید را معرفی کردیم. نمودارها نشان می‌دهند که این جواب‌ها می‌توانند سیاهچاله‌های با دو یا چند افق، اکستریم و همچنین سیاهچاله‌های بدون تکینگی را نشان دهند (شکل‌های ۱ تا ۴). کمیت‌های ترمودینامیکی دما و آنترپی، همچنین بارالکتریکی، جرم و پتانسیل الکتریکی سیاهچاله‌ها را محاسبه کردیم. نشان دادیم که این کمیت‌ها در قانون اول ترمودینامیک به‌شکل استاندارد آن صدق می‌کنند. این بدان معناست که قانون اول ترمودینامیک در مورد سیاهچاله‌های دیلاتونی معرفی شده برقرار است. به‌منظور بررسی پایداری ترمودینامیکی سیاهچاله‌ها، با استفاده از روش آنسامبل کانونیک، ظرفیت گرمایی سیاهچاله‌ها را محاسبه و با استفاده از نمودارهای همزمان دما و ظرفیت گرمایی نقاط گذار فاز نوع اول و نوع دوم، همچنین شعاع افق رویداد سیاهچاله‌های فیزیکی پایدار را تعیین کردیم (شکل‌های ۵ تا ۷). سپس برای پیدا کردن جواب‌های سیاهچاله‌ای در نظریه برانس-دیکی، ضمن معرفی یک متریک متقارن کروی در چهارچوب جوردن، ضرایب متریک را با اعمال تبدیلات همدیس وارون محاسبه کردیم. نمودارها نشان می‌دهند که این جواب‌ها، با انتخاب مناسب پارامترها، می‌توانند سیاهچاله‌های برانس-دیکی دارای دو یا چند افق رویداد، سیاهچاله‌های اکستریم و بدون افق را تولید کنند (شکل‌های ۸ تا ۱۱). ضمن محاسبه دما، آنترپی، بار الکتریکی، جرم و پتانسیل الکتریکی سیاهچاله‌ها در

- [16] M. Dehghani, Black hole thermodynamics in the Brans–Dicke–Maxwell theory, *European Physical Journal C*, 83 (2023) 734. doi.org/10.1140/epjc/s10052-023-11917-w.
- [17] M. Kord Zangeneh, A. Sheykhi and M.H. Dehghani, Thermodynamics of higher dimensional topological dilaton black holes with power-law Maxwell field, *Physical Review D*, 91 (2015) 044035. doi.org/10.1103/PhysRevD.91.044035.
- [18] S.H. Hendi, Asymptotic charged BTZ black hole solutions, *Journal of High Energy Physics*, 03 (2012) 065. [doi.org/10.1007/JHEP03\(2012\)065](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2012)065).
- [19] M. Dehghani, Asymptotically massive-BTZ black holes with nonlinear electrodynamics in massive gravity theory, *Physics of the Dark Universe*, 31 (2021) 100749. doi.org/10.1016/j.dark.2020.100749.
- [20] M. Dehghani, Three-dimensional scalar-tensor black holes with conformally invariant electrodynamics, *Physical Review D*, 100 (2019) 084019. doi.org/10.1103/PhysRevD.100.084019.
- [21] M. Dehghani, Thermodynamics of black holes charged with a conformally invariant electrodynamics in (n+1)-dimensional scalar-tensor theory, *Modern Physics Letters A*, 39 (2024) 2450009. doi.org/10.1142/S0217732324500093.
- [22] A. Sheykhi and A. Kazemi, Higher dimensional dilaton black holes in the presence of exponential nonlinear electrodynamics, *Physical Review D*, 90 (2014) 044028. doi.org/10.1103/PhysRevD.90.044028.
- [23] S.H. Hendi and M. Momennia, Thermodynamic instability of topological black holes with nonlinear source, *European Physical Journal C*, 75 (2015) 54. [10.1140/epjc/s10052-015-3283-2](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3283-2).
- [7] H. Motohashi, A.A. Starobinsky, Constant-roll inflation in scalar-tensor gravity, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 11 (2019) 025. doi.org/10.1088/1475-7516/2019/11/025.
- [8] M. Ildes, M. Arik, Analytic solutions of Brans–Dicke cosmology: Early inflation and late time accelerated expansion, *International Journal of Modern Physics D*, 32 (2023) 2250131. doi.org/10.1142/S0218271822501310.
- [9] B.P. Abbott et al., (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger, *Physical Review Letters*, 116 (2016) 061102. doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.061102.
- [10] S.W. Hawking, Black holes and thermodynamics, *Physical Review D*, 13 (1976) 191, doi.org/10.1103/PhysRevD.13.191.
- [11] J.D. Bekenstein, Black holes and Entropy, *Physical Review D*, 7 (1973) 2333. doi.org/10.1103/PhysRevD.7.2333.
- [12] R.M. Wald, The thermodynamics of black holes, *Living Reviews in Relativity*, 4 (2001) 6. doi.org/10.12942/lrr-2001-6.
- [13] A. Sheykhi, H. Alavirad, Topological Black Holes in Brans-Dicke-Maxwell Theory, *International Journal of Modern Physics D*, 18 (2009) 1773. doi.org/10.1142/S021827180901531X.
- [14] M.K. Zangeneh, M.H. Dehghani, A. Sheykhi, Thermodynamics of topological black holes in Brans-Dicke gravity with a power-law Maxwell field, *Physical Review D*, 92 (2015) 104035. doi.org/10.1103/PhysRevD.92.104035.
- [15] R.-G. Cai, Y.S. Myung, Black holes in the Brans-Dicke-Maxwell theory, *Physical Review D*, 56 (1997) 3466. doi.org/10.1103/PhysRevD.56.3466.

- [29] M. Dehghani, Thermodynamics of novel scalar-tensor-Born-Infeld black holes the, *European Physical Journal C*, 83 (2023) 987. doi.org/10.1140/epjc/s10052-023-12155-w.
- [30] S.H. Hendi, R. Ramezani-Arani and E. Rahimi, Thermal stability of d-dimensional Lifshitz like topological black holes in special class of F(R) gravity, *Journal of Research on Many-body Systems*, 10 (2020) 147. doi.org/10.22055/JRMBS.2020.15569.
- [31] H.W. Braden, J.D. Brown, B.F. Whiting, J.W. York, Charged black hole in a grand canonical ensemble, *Physical Review D* 42, (1990) 3376. doi.org/10.1103/PhysRevD.42.3376.
- [32] S. Soroushfar and B. Pourhassan, Thermodynamic geometry of a charged AdS black hole with corrected entropy, *Journal of Research on Many-body Systems*, 11 (2021) 74. doi.org/10.22055/JRMBS.2021.17029.
- [24] M. Dehghani, Thermodynamic properties of dilaton black holes with nonlinear electrodynamics, *Physical Review D*, 98 (2018) 044008, doi.org/10.1103/PhysRevD.98.044008.
- [25] I.Z. Stefanov, S.S. Yazadjiev and M.D. Todorov, Scalar–tensor black holes coupled to Euler–Heisenberg nonlinear electrodynamics, *Modern Physics Letters A*, 17 (2007) 1217. doi.org/10.1142/S0217732307023560.
- [26] S. Habib Mazharimousavi and M. Halilsoy, Einstein-Born-Infeld black holes with a scalar hair in three-dimensions, *Modern Physics Letters A*, 30 (2015) 1550177. doi.org/10.1142/S0217732315501771.
- [27] N.B. Birrell, P.C.W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press, Cambridge, (1982).
- [28] A. Sheykhi and S. Hajkhalili, Dilaton black holes coupled to nonlinear electrodynamic field, *Physical Review D*, 89 (2014) 104019. doi.org/10.1103/PhysRevD.89.104019.