Document Type: Full length research Paper

Pages: 29-38

Superconducting Copper Pairs in AA Bilayer Graphene

Rouhollah Gholami*

Department of Physics, Ilam University, Ilam, Iran

Received: 12.10.2024 Final revised: 24.12.2024 Accepted: 21.07.2025

Doi:10.22055/jrmbs.2025.20196

Abstract

We use a multi-band extended-Hubbard model to describe superconductivity in AA-bilayer graphene. In addition to usual chiralityof single-layer graphene due to helicity of mass-less quasi-particles, they describe by additional index called “cone-index”. This issue have been addressed very little in the literature. The prominent role of this index in phenomena such as Klein tunneling and Andreev reflection has been noted in a few articles.In this manuscript, it is shown that the cone-index is a consequence of mirror symmetry and is itself a new and distinct type of chirality from the helicity of mass-less quasiparticles, which is called here “mirror-chirality”.Due to the mirror-symmetry, by applying a unitary transformation, Hamiltonian of bilayer graphene is block-diagonalized. This is, mathematically, analogous to reduction of the Dirac equation in the 4-components Dirac representation to the chiral Weyl representation acting on left-handed and right-handed 2-components“Weyl spinor’’. The method is extended to include superconducting state. It is shown that four electrons in upper and lower layers are coupled to form two kind of superconducting Cooper pairs with extra left\right handed chiral character. Inter-band Cooper pairing between quasi-particles with different Mirror-chairality indices is forbidden which naturally leads to a hidden double-gap superconductivity with new aspects.

Keywords: Superconductivity, AA bilayer graphene, Cooper pair, Prohibition rule, Weyl representation, chirality

*Corresponding Author:r.gholami@gmail.com

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

مقاله پژوهشی کامل

جفت‌های کوپر ابررسانایی در گرافین دو لایه AA

روح‌الله غلامی*

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه ایلام، ایلام–ایران

دریافت: ۱۴۰۳/۰۷/۲۱ ویرایش نهائی: ۱۴۰۳/۱۰/۰۴ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۴/۳۰

Doi:10.22055/jrmbs.2025.20196

چکیده

در این مقاله از مدل هابارد چند باندی، برای بررسی ابررسانایی گرافین دو لایهAA استفاده شده است. علاوه بر دستوارگی معروف گرافین تک‌لایه، ناشی از هلیسیتی ذرات با جرم صفر، شبه‌ذرات در گرافین دو لایهAA، با یک شاخص کوآنتومی جدید به‌نام شاخص مخروطی نیز توصیف می‌شوند. در معدودی از مقالات، نقش بارز این شاخص در پدیده‌هایی نظیر تونل زنی کلین و بازتاب آندریف مورد توجه بوده است. در مقاله پیش رو، نشان داده شده است شاخص مخروطی، نتیجه تقارن آینه‌ای می‌باشد و خود یک نوع دستوارگی جدید و متمایز از هلیسیتی شبه‌ذرات با جرم صفر است. با معرفی یک تبدیل یکانی، هامیلتونی گرافین دو لایه، به دو بخش زوج و فرد بلوک قطری می‌گردد که یادآور تبدیل معادلهٔ نسبیتی دیراک در نمایش چهار مؤلفه‌ای استاندارد، به دو معادلهٔ نسبیتی وایل در نمایش اسپینوری راستگرد و چپگرد است. در حالت ابررسانایی، متناظر با بخش‌های زوج/فرد هامیلتونی، چهار الکترون، با هم تیم شده و جفت‌های کوپر راستگرد و چپگرد را به‌وجود می‌آورند. امکان جفت‌شدگی بین باندی، میان الکترون‌هایی با دستوارگی آینه‌ای متفاوت، وجود ندارد. این قاعدهٔ منع، منجر به‌ظهور یک ابررسانایی دو گافه پنهان با زوج‌های کوپر جدید می‌گردد.

کلیدواژگان: ابررسانایی، گرافین دولایه، تقارن آینه‌ای، جفت‌شدگی کوپر، قاعدهٔ منع، نمایش وایل، دستوارگی

مقدمه

ابررسانایی در مواد با چگالی اندک حامل‌های بار مانند گرافین دولایه چرخیده [۳–۱] و گرافین دو و سه لایه [۶–۴] در بسیاری از مطالعات اخیر مورد توجه ویژه بوده است. کشف خارق‌العاده اخیر مبنی بر مشاهده برخی فازهای مهم ماده مانند عایق مات [۲] و ابررسانایی در گرافین دو لایهٔ چرخیده تحت زاویه‌های جادویی [۱]، پنجرهٔ جدیدی به مبحث ابررسانایی دمای اتاق باز کرده است. پیشرفت‌های شگرف در ساخت مواد دو بعدی، باعث شده است که طیف گسترده و روز افزونی از مقالات، معطوف به‌مطالعهٔ نظری و تجربی موضوع ابررسانایی در این گونه سازه‌ها باشد [۳]. گرافین دو لایهٔ طبیعی به‌صورت ساختار برنالی است [۷]. با این اوصاف فاز ساختاری موسوم به AA که در

نویسنده مسئول: r.gholami@ilam.ac.ir

باز نشر این مقاله با ذکر منبع آزاد است.

این مقاله تحت مجوز کریتیو کامنز تخصیص 4.0 بین‌المللی می‌باشد

آن اتم‌های لایهٔ پایین و لایهٔ بالا کاملاً بر هم منطبق باشند (شکل۱)، نیز ممکن است تحت شرایط خاصی تشکیل گردد [۱۰-۸] پیچش گرافین دو لایه، می‌تواند منجر به تشکیل الگوی شبکه‌ای موسوم به الگوی موبر گردد [۱و۲] که در آن ساختارهای AA و AB به‌صورت جزیره‌ای قرار گرفته‌اند. این چرخش باعث ایجاد رفتارهای بدیعی در بین شبه‌ذرات می‌گردد. علی رغم، مطالعهٔ زیاد ساختارهای گرافینی دو لایهٔ برنالی و چرخیده، فاز دولایه‌ای AA در ضمن سادگی ساختاری، بسیار اندک مورد مطالعه قرار گرفته است [۱۵-۱۱]. این در حالی است که ملاحظات تجربی دقیق، نشان می‌دهد که لایه‌بندی AA آسان‌تر، اتم‌های اینترکلیت شده (درج متناوب اتمی) را می‌پذیرد [۱۱و۱۲]. علاوه بر این می‌توان نشان داد که شبه‌ذرات در این مواد رفتارهای متفاوتی نسبت به گرافین تک لایه دارند [۱۸-۱۳]. در منبع [۱۶] نشان داده شده است که پدیدهٔ تونل زنی کلاین در گرافین دو لایه AA خواص منحصر به‌فردی نسبت به گرافین تک لایه دارد. در این مقاله ژانگ و همکاران با معرفی شاخصی با نام شاخص مخروطی که خود ویژه‌مقدار عملگری با همین نام است، نشان داده‌اند که در انرژی‌های پایین و در نزدیکی سطح فرمی، این شاخص مخروطی، در حین تونل‌زنی، به‌شدت ناوردا است که نشان می‌دهد شبه‌ذرات در گرافین دو لایه، علاوه بر دستوارگی معروف، با این شاخص نیز توصیف می‌شوند [۱۶] این ناوردایی، ممکن است منجر به کاربردهای تجربی، در ساخت برخی ابزارهای الکترونیکی شود که بر اساس انتقال شاخص مخروطی الکترون‌ها کار می‌کنند (conetronic). گزارش‌هایی در زمینه مشاهدهٔ ابررسانایی در گرافین دولایه اینترکلیت شده در دست می‌باشد [۴،۵،۱۷] با پیروی از مدلی که توسط ژانگ و همکاران معرفی گردیده است [۱۶]، در مرجع [۱۸]، نشان داده شده است که خواص بازتاب آندریف در گرافین دو لایه نیز به‌شدت از درجهٔ آزادی مخروط اثر می‌پذیرد [۱۸]. در مقاله ذکر شده، نشان داده شده است که بسته به اختلاف پتانسیل گیت اعمال شده بر لایه‌های بالا و پایین، بازتاب آندریف و بازتاب نرمال برای شبه‌ذرات با شاخص مخروطی یکسان (intra-cone) یا متفاوت (inter-cone) ممکن است ممنوع یا مجاز باشد [۱۸]. در مطالعهٔ خواص ناشی از همبستگی‌های الکترونی در گرافین دولایه AA اینترکلیت شده، یکی از جنبه‌های مهم، نقش بارز تقارن آینه‌ای [۱۷]، در آن می‌باشد که تا جایی که نویسنده اطلاع دارد، مورد اهتمام نبوده و لازم است هم به‌صورت تجربی و هم نظری، مورد توجه ویژه قرار گیرد [۲۱-۱۷]. اعتقاد بر این است که مدل هابارد در ساختارهای شش گوش مانند گرافین، می‌تواند خواص ناشی از اندرکنش‌های الکترونی مانند فاز ابررسانایی و عایق مات و ... را به‌خوبی توصیف نماید [۲۱-۱۹].

در این مقاله، با استفاده از رهیافت مبتنی بر تقارن آینه‌ای موجود در ساختار گرافین دو لایه AA، با ریاضیات نسبتاً آسان، در حالت کلی و بدون در نظر گرفتن حد فوق نسبیتی در نزدیکی نقاط دیراک ($m \to 0$) که در دیگر مقالات مد نظر بوده است [۱۸و۱۶] با به‌کارگیری مدل هابارد توسعه یافته به‌بررسی مبحث ابررسانایی در این ساختار، پرداخته شده است. با استفاده از یک تبدیل یکانی که از لحاظ ریاضی، معادل تبدیل نمایش تقلیل‌پذیر دیراک به‌نمایش تقلیل ناپذیر وایل برای اسپینورهای چپگرد و راستگرد است، معادلهٔ شرودینگر

به دو بخش زوج و فرد شبه‌گرافینی تقلیل یافته است و در نتیجه ساختار نواری گرافین دو لایه، به دو ساختار تک‌لایه‌ای تبدیل شده است (شکل۲). نشان داده شده است که عددی که در مراجع [۱۶] صرفاً از روی علامت‌های ظاهر شده در اسپینورهای گرافین دو لایه، به‌عنوان شاخص مخروطی نام گذاری شده است، به‌لحاظ تعبیر فیزیکی، در واقع عدد کوآنتومی مربوط به تقارن آینه‌ای است شکل۳الف و خود نشان از یک شبه‌دستوارگی بیشتر اما ماهیتاً متفاوت از هلیسیتی شبه‌ذرات دیراک در گرافین تک لایه دارد. به‌عبارت دیگر نشان داده شده است که یک گرافین دولایه AA از لحاظ ریاضی معادل یک گرافین تک لایه است که دو نوع شبه‌ذره بدون برهم‌کنش با اعداد کوآنتومی زوج و فرد (راستگرد و چپگرد) در آن در حال حرکت می‌باشند. به‌عبارتی دیگر، شبه‌اسپین‌های (iso-spin) گرافین دو لایه که در شکل۳ب نشان داده شده است، از دور هم جمع شدن دو الکترون با اسپین یکسان، یکی از لایه بالا و دیگری از لایه پایین، در اربیتال‌های مولکولی پیوندی و پاد پیوندی، تشکیل شده‌اند. همچنین نشان داده شده است که در حالت ابررسانایی، تقارن آینه‌ای، ذرات داخل گرافین را وادار می‌کند که رفتار جمعی خاصی از خود نشان دهند. در این حالت، زوج‌های کوپر از جفت‌شدن دو شبه‌ذره (چهار الکترون) با عدد مخروطی مشابه به‌وجود می‌آیند شکل۳ج و امکان جفت شدن شبه‌ذرات با دستوارگی متفاوت بین باندی ممکن نیست و لذا امکان ایجاد ابررسانایی زوج/فرد دو گاف، ممکن است. این ادعا در توافق با نتایج سایر مقالات مبنی بر امکان ایجاد ابررسانایی لایه‌ای و بین لایه‌ای فونونی ناشی از تقارن گرافین دو لایه می‌باشد [۱۹]. جفت‌شدگی‌های بین باندی باعث پیچده شدن بررسی تجربی تقارن پارامتر نظم ابررسانایی می‌گردد. این قاعده منع با تجزیه انرژی شبه‌ذرات ابرسانایی به‌دو بخش زوج و فرد و امکان ایجاد ابررسانایی با دو گاف مجزا شبه‌گرافینی تک‌لایه، می‌تواند به‌مطالعهٔ تجربی گره‌های (nodal structure) انرژی شبه‌ذرات در نزدیکی سطوح فرمی آنها کمک کند. در این گزارش با یک ریاضیات نسبتاً ساده، در حالت گرافین دولایه خالص تلاش کرده‌ایم توجه‌ها را به‌این موضوع جلب نماییم.

هامیلتونی مؤثر

ساختار گرافین دو لایهٔ AA نشان داده شده در شکل۱ به‌این صورت است که اتم‌های جایگاهای A و B یک لایه گرافین بر روی اتم‌های مشابه لایه دیگر قرار می‌گیرند. در مدل هابارد منفی هامیلتونی سیستم را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\hat{H} = \hat{H}_n + \hat{H}_p \qquad ۱$$

پانویس‌های n و p به‌ترتیب بخش‌های غیربرهم‌کنشی(نرمال) و برهم‌کنشی (زوج‌شدگی ابررسانایی) این هامیلتونی را نشان می‌دهد و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\hat{H}_n = -\sum_{i\alpha_m}\sum_{j\beta_{m'}} t^{mm'\sigma\sigma}_{i\alpha_m j\beta_{m'}} \hat{c}^{\dagger\sigma}_{i\alpha_m\sigma}\hat{c}^{\sigma}_{j\beta_{m'}\sigma} + \sum_{i\alpha_m,\sigma}(\varepsilon_{i\alpha_m}-\mu) \qquad ۲$$

$$\hat{H}_p = \frac{1}{2}\sum_{i\alpha_m}\sum_{j\beta_{m'}} U^{\sigma\sigma'}_{i\alpha_m j\beta_{m'}} \hat{n}_{i\alpha_m\sigma}\hat{n}_{j\beta_{m'}\sigma'} \qquad ۳$$

در این روابط، $i\,(j)$ نقاط شبکه براوه می‌باشد که هر کدام چهار زیر نقطه دارند. $m\,(m')=1,2$ شاخص لایه و α_m و $\beta_{m'}$ نمایانگر هر کدام از چهار زیر نقطه متناظر با اتم‌های نوع A^m و B^m واقع در جایگاه‌های غیر یکسان ساختار شش گوش لایهٔ mام هستند و $t^{mm'\sigma\sigma}_{i\alpha_m j\beta_{m'}}$

پارامترهای انتگرال جهش بین این جایگاها می‌باشد. همچنین $\hat{c}^{\dagger\sigma}_{i\alpha_m\sigma}(\hat{c}^{\sigma}_{i\beta_{m'}\sigma})$ عملگر خلق (نابودی)، $\hat{n}_{i\alpha_m\sigma}$ عملگر تعداد و $U^{\sigma\sigma'}_{i\alpha_m j\beta_{m'}}$ پتانسیل هابارد منفی کنش بین الکترون‌ها در و بین این جایگاه‌ها می‌باشند و μ پتانسیل شیمیایی است.



شکل۱. ساختار اتمی گرافین دو لایه AA. اتم‌های لایه بالا درست روی اتم‌های لایه پایین قرار دارند

الف) بخش غیر برهم کنشی

با ایجاد ترکیب خطی از اربیتال‌های اتمی به‌صورت تابع بلاخ زیر

$$\left|\Psi_{\vec{k}}(\vec{r})\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}\sum_{m=1}^{2}\sum_{\alpha_m=A^m}^{B^m}c_{\alpha_m}e^{i\vec{k}.\vec{r}_{i\alpha_m}}\left|\phi_{i\alpha_m}\right\rangle$$

$$\left|\phi_{i\alpha_m}\right\rangle=\left|\phi_{p_z}\left(\vec{r}-\vec{r}_i-\vec{d}^{\,m}_{\alpha}\right)\right\rangle$$ که در آن

اربیتال‌های p_z اتمی زیرجایگاهی مختلف سایت iام می‌باشد و جایگزینی در معادلهٔ شرودینگر، معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\sum_{m'=1}^{2}\sum_{\beta_{m'}=A_{m'}}^{B_{m'}}\varepsilon_{\alpha_m\beta_{m'}}(\vec{k})c_{\beta_{m'}}+\left(\varepsilon^{on}_{\alpha_m}-\mu\right)c_{\alpha_m}=E(\vec{k})c_{\alpha_m}$$

$$\varepsilon_{\alpha_m\beta_{m'}}(\vec{k})=-\frac{1}{N}\sum_{i,j}e^{i\vec{k}.(\vec{r}_{i\alpha_m}-\vec{r}_{j\beta_{m'}})}t^{mm'\sigma\sigma}_{i\alpha_m j\beta_{m'}}$$

که در c_{α_m} ضرایب بلاخ می‌باشد. در مقاله‌ای که پیشتر منتشر گردید [۱۹] ساختار باندی تعدادی از مواد دو لایه‌ای از جمله گرافین دو لایه AA مورد بحث قرار گرفت. ساختار باند بخش نرمال، از حل معادله شرودینگر زیر به‌دست می‌آید

$$H_n\psi=\begin{bmatrix}H_{11}&H_{12}\\H_{21}&H_{22}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\chi_1\\\chi_2\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}\chi_1\\\chi_2\end{pmatrix}$$

ماتریس‌های 2×2 H_{11} و H_{22} هامیلتونی شبه‌گرافینی لایه‌های فوقانی و زیرین می‌باشد وشکل ماتریسی آنها $\chi_1=\begin{pmatrix}c_{1A}\\c_{1B}\end{pmatrix}$ در مرجع [۱۹] معرفی شده است. همچنین $\chi_2=\begin{pmatrix}c_{2A}\\c_{2B}\end{pmatrix}$ و شبه‌اسپین‌های لایه‌ای هستند که در آنها $c_{1A(B)},c_{2A(B)}$ ضرایب بلاخ تابع موج می‌باشند .معادلهٔ شرودینگر بالا، در پایهٔ شبه‌اسپینورهای چهار مؤلفه‌ای–مشابه نمایش دیراک در حل معادلهٔ نسبیتی دیراک–نمایش داده شده است. به‌خاطر وجود تقارن آیینه‌ای AA نسبت به صفحه‌ای که از مرکز و موازی لایه‌های بالا و پایین می‌گذرد. معادلهٔ۴ تحت تبدیل شاخص‌های لایه $1\leftrightarrow2$ ناورداست و بنابراین داریم $H_{11}=H_{22}$ و همچنین $H_{12}=H_{21}$ می‌باشد.تقارن یاد شده ایجاب می‌کند که رابطهٔ بین ضرایب بلاخ به‌صورت $c_{\alpha_1}=\pm c_{\alpha_2}$ باشد.

این تقارن، معرف عملگر تقارن آینه‌ای $\widehat{M}=\gamma_D^5=\begin{pmatrix}0&I\\I&0\end{pmatrix}$ است که $\gamma_D^5=\sigma_x\otimes I$ پنجمین ماتریس گاما در نمایش دیراک می‌باشد.

از اثر دادن این عملگر بر شبه‌اسپین‌ها، ویژه‌مقادیر $h=\pm1$ به‌دست می‌آید

$$\begin{pmatrix}0&I\\I&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi_1\\\chi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\chi_2\\\chi_1\end{pmatrix}=\pm\begin{pmatrix}\chi_1\\\chi_2\end{pmatrix}$$

Error! Bookmark not defined.

که در اینجا، این درجه آزادی را شاخص دستوارگی آینه‌ای نامیدیم. از آنجا که عملگر تقارن آینه‌ای $\hat{M}=\gamma_D^5$ با همیلتونی جابه‌جا می‌شود لذا شاخص دستوارگی آینه‌ای h یک ثابت حرکت می‌باشد.

دلیل اهمیت ماتریس γ^5 در نظریهٔ میدان کوآنتومی، فارغ از اینکه در چه نمایشی نوشته شود (نمایش دیراک، وایل یا مایرونا)، ارتباط آن با تقارن لاگرانژی میدان و تعریف بخش‌های چپگرد و راستگرد میدان است. برای این منظور عملگرهای تصویر $\hat{P}_{\pm}=\frac{1}{2}\left(I\pm\gamma^5\right)$ تعریف می‌شود به‌طوری‌که از اثر آنها بر میدان ψ بخش‌های راستگرد/چپگرد تعریف می‌شود $\psi_{R(L)}=P_{+(-)}\psi$. در حالت گرافین تک‌لایه، جرم شبه‌ذرات در نزدیکی نقاط دیراک به‌سمت صفر میل می‌کند. در این حالت در مجاورت نقاط دیراک (دره‌ها) $\vec{K}$ و $\vec{K}'$، شبه‌ذرات با یک شاخص دستوارگی $\chi_{\pm}=\pm1$ که خود یک ثابت حرکت است، توصیف می‌شوند. این شاخص در واقع ویژه‌مقادیر هلیسیتی ذرات بی‌جرم است (حد فوق نسبیتی) که به‌صورت $h=\frac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{|\vec{p}|}$ تعریف می‌گردد، در حل معادله نسبیتی دیراک، می‌توان تحت تبدیل یکسان زیر، از نمایش دیراک به نمایش وایل رفت

$$\gamma_w^{\mu}=U\gamma_D^{\mu}U^{\dagger} \qquad ٤$$

که در آن $U=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}I & I\\ I & -I\end{pmatrix}$ می‌باشد. در این نمایش، عملگرهای وایل، بر اسپینورهای راستگرد و چپ گرد وایل اثر می‌کنند. در اینجا برای ماتریس پنجم گاما داریم $\gamma_W^5=\begin{pmatrix}-I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}$. در مرجع [۱۹] ما نشان داده‌ایم که تحت فرایندی کاملاً مشابه، می‌توان هامیلتونی گرافین دو لایه AA را تحت تبدیل یکانی UHU^{-1} به دو بخش با تقارن آینه‌ای زوج و فرد بلوک قطری نمود

$$H=\begin{pmatrix}H^{+} & 0\\ 0 & H^{-}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}H_{11}+H_{12} & 0\\ 0 & H_{11}-H_{12}\end{pmatrix} \qquad ٥$$

همچنین تحت این تبدیل اسپینورهای چپگرد و راستگرد وایل به‌ترتیب به‌صورت $\psi_L=\frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_1-\chi_2)$ و $\psi_R=\frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_1+\chi_2)$ به‌دست می‌آیند که معادل اربیتال‌های مولکولی پیوندی و پاد پیوندی هستند. لذا معادلهٔ شرودینگر به دو معادله شرودینگر مستقل به‌صورت زیر، برای به‌دست آوردن بخش‌های زوج و فرد ساختار باند تبدیل می‌شود

$$H^{+}(\vec{k})\chi_R=E^{+}(\vec{k})\chi_R$$
$$H^{-}(\vec{k})\chi_L=E^{-}(\vec{k})\chi_L \qquad ٦$$

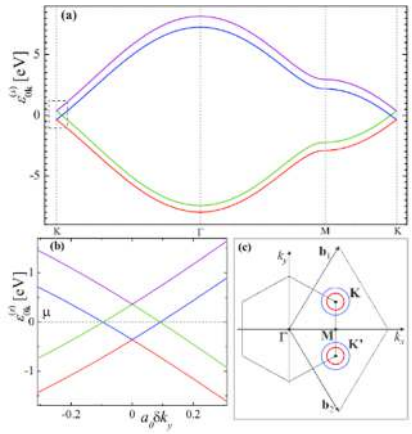
معادلات بالا مشابه معادلات وایل در کوآنتوم نسبیتی می‌باشند. این بدان معناست که شبه‌ذرات در گرافین دو لایه AA مشابه ذرات و پاد ذرات در کوآنتوم نسبیتی، علاوه بر هلیسیتی معروف گرافین تک لایه، از یک نوع دستوارگی دیگری نیز برخوردار هستند که منشأ آن تقارن آینه‌ای است. در مقالات مربوط به گرافین تک لایه مفهوم هلیسیتی و دستوارگی، یکسان گرفته شده است، البته به لحاظ ریاضی نیز برای ذرات نسبیتی با جرم صفر، این دو مفهوم، معادل می‌شوند.

این نتیجه بسیار مهمی است و همواره در مسائل مرتبط با گرافین دو لایه AA، مانند پدیده تونل‌زنی کلین [۱۶]، ابررسانایی [۱۷] و یا بازتاب آندریف [۱۸] همواره خود را نشان می‌دهد. برای ایجاد یک تصور ذهنی از شبه ذرات، در تقریب نزدیک‌ترین همسایه اول، روابط پاشندگی را برای گرافین دو لایه به‌دست می‌آوریم. این ویژه‌مقادیر، نسبت به ویژه‌مقادیر عملگر آینه‌ای به‌صورت زوج و فرد از هم جدا می‌شوند:

$$E_{n,\eta_{\pm}}^{\pm}(\vec{k})=\pm\gamma_0+\eta_{\pm}t^{\pm}\left|f(\vec{k})\right| \qquad ٧$$

در رابطهٔ بالا، $\eta_{\pm}=1,-1$ متناظر با باندهای ظرفیت و والانس و $f(\vec{k})=e^{i\vec{k}.\vec{\delta}_1}+e^{i\vec{k}.\vec{\delta}_2}+e^{i\vec{k}.\vec{\delta}_3}$ می‌باشد. همچنین $t^{\pm}=t_1\pm\gamma_1$ است. ضرایب t_1 و γ_1 به‌ترتیب پارامتر جهش درون و میان‌لایه‌ای و $\vec{\delta}_i$

بردارهای متصل‌کننده، بین اتم‌های نوع A و نوع B در تقریب نزدیکترین همسایهٔ اول هستند. همچنین پارامتر جهش بین لایه‌ای مستقیم بین اتم‌های یکسان با γ_0 نشان داده شده است. بالانویس +/− در رابطهٔ۷ برای نمایش بخش‌های زوج و فرد ساختار باند به‌کار رفته است. رابطهٔ۷، برای بخش‌های زوج و فرد تابع پراکندگی انرژی گرافین دولایه، در شکل۱الف و در نزدیکی نقاط دیراک این رابطه به‌صورت نمادین در شکل۱ب رسم شده است. همان‌طور که گفته شد، مخروط‌های دیراک علاوه بر دستوارگی معروف خود با یک عد کوآنتومی دیگری $h=\pm1$ توصیف می‌شوند که در اینجا، شاخص تقارن آینه‌ای نام‌گذاری شده است. این مخروط‌ها به‌اندازهٔ γ_0 بالا و پایین سطح فرمی قرار دارند. در بخش بعدی نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان این موضوع را به‌حالت ابررسانایی تعمیم داد. خواهیم دید که زوج‌های کوپر صرفاً بین شبه‌ذراتی که این عدد کوآنتومی جدید برای آنها یکسان است شکل می‌گیرند و زوج‌شدگی بین شبه‌ذرات با دستوارگی آینه‌ای متفاوت ناممکن است.



شکل۲. ساختار باند گرافین دولایه AA را می‌توان به‌صورت دو کپی از گرافین تک‌لایه (بخش زوج و فرد) تقسیم کرد. بخش زوج (با رنگ‌های بنفش و سبز) و همچنین بخش فرد (با رنگ آبی و قرمز) در شکل بالا مشاهده نمود. نقاط دیراک مربوط به بخش‌های زوج و فرد ساختار باند به‌ترتیب به‌اندازه γ_0بالا و پایین سطح فرمی واقع شده‌اند. این مخروط‌ها علاوه بر هیلیسیتی با یک عدد کوآنتومی زوج و فرد اضافه مربوط به تقارن آینه‌ای $h=\pm1$ توصیف می‌شوند

ب) بخش برهم‌کنشی: زوج‌شدگی ابررسانایی

در نمایش ماتریسی فضای تکانه (نمایش نامبو) هامیلتونی هابارد ابررسانایی به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$H_{su}=\begin{bmatrix} H_n(\vec{k}) & H_p(\vec{k}) \\ H_p^{\dagger}(\vec{k}) & -H_n^{*}(-\vec{k}) \end{bmatrix} \qquad ۸$$

که در آن ماتریس های $H_n(\vec{k})$و $H_p(\vec{k})$ به‌ترتیب بخش‌های غیربرهم‌کنشی و برهم‌کنشی هامیلتونی سیستم می‌باشند که بخش غیربرهم‌کنشی نرمال در معادلهٔ۴ معرفی گردید و بخش برهم‌کنشی به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$H_p=\begin{bmatrix} H_{11}^{p}(\vec{k}) & H_{12}^{p}(\vec{k}) \\ H_{21}^{p}(\vec{k}) & H_{22}^{p}(\vec{k}) \end{bmatrix} \qquad ۹$$

در رابطهٔ۹ عناصر $H_{mn}^{p}(\vec{k})$ماتریس‌های 2×2هستند و به‌ازای m, n یکسان، نشان‌دهنده جفت‌شدگی الکترونی درون لایه‌ای است و به‌ازای m, n متفاوت، متناظر با جفت‌شدگی بین لایه‌ای می‌باشد. به‌خاطر وجود تقارن آینهای $H_{11}^{p}(\vec{k})=H_{22}^{p}(\vec{k})$همچنین برای درایه‌های بین لایه‌ای $H_{12}^{p}(\vec{k})=H_{21}^{*p}(\vec{k})$ می‌باشد. بدون کاستن از عمومیت مسئله، چنانچه نظریهٔ غالب ابررسانایی تکتایی بین نزدیکترین همسایه‌های اول لایه‌ای و بین لایه را به‌کار گیریم، شکل ماتریسی این عناصر به‌صورت زیر می‌باشد:

$$H_{mn}(\vec{k})=\begin{bmatrix} 0 & \Delta_{mn}(\vec{k}) \\ \Delta_{mn}^{*}(\vec{k}) & 0 \end{bmatrix}$$

که در آن برای جفت‌شدگی لایه‌ای داریم $\Delta_{11}(\vec{k})=\Delta_{22}(\vec{k})=\sum_{i=1}^{3}\Delta_i e^{i\vec{k}.\vec{\delta}_i}$ و برای جفت‌شدگی بین لایه‌ای این رابطه به‌صورت

$\Delta_{12}(\vec{k}) = \Delta^{*}_{21}(\vec{k}) = \sum_{i=1}^{3} \Delta'_i e^{i\vec{k}.\vec{\delta}_i}$ می‌باشد.

پارامترهای Δ_i و Δ'_i به‌ترتیب دامنه‌های جفت‌شدگی لایه‌ای و بین لایه‌ای میان همسایه‌های مختلف می‌باشد. برای به‌دست آوردن طیف انرژی زوج‌های کوپر باید هامیلتونی۸ را قطری کنیم. در اینجا نیز مانند حالت نرمال، تقارن آینه‌ای باعث می‌شود رفتار جمعی شبه‌ذرات گرافین دو لایه AA نسبت به گرافین تک‌لایه، ویژگی‌های منحصری داشته باشد. مجدداً، با به‌کارگیری تبدیلات تقارنی آینه‌ای که معادل ماتریس تبدیل یکانی T به‌شکل زیر است:

$$T = \begin{bmatrix} \gamma_5 & 0 \\ 0 & \gamma_5 \end{bmatrix}, \gamma_5 = \begin{pmatrix} I_{2\times2} & I_{2\times2} \\ I_{2\times2} & -I_{2\times2} \end{pmatrix} \qquad ۱۰$$

که در آن $I_{2\times2}$ ماتریس واحد است، می‌توان هامیلتونی ابررسانایی را به‌صورت زیر به دو بلوک ابررسانایی مستقل از هم قطری نمود

$$H_{su} = \begin{bmatrix} H^{+}_{su}(\vec{k}) & 0 \\ 0 & H^{-}_{su}(\vec{k}) \end{bmatrix} \qquad ۱۱$$

که در $H^{+}_{su}(\vec{k})$ و $H^{-}_{su}(\vec{k})$ رابطهٔ بالا به‌ترتیب هامیلتونی ابررسانایی بخش زوج و فرد هستند و با روابط زیر تعریف می‌شوند

۱۲

$$H^{\pm}_{su} = \begin{bmatrix} H^{\pm}_{n}(\vec{k}) & H^{\pm}_{p}(\vec{k}) \\ H^{\pm}_{p}(\vec{k}) & -H^{\pm}_{n}(\vec{k}) \end{bmatrix}$$

در معادلهٔ بالا $H^{\pm}_{n}(\vec{k})$ هامیلتونی بخش زوج/فرد حالت نرمال و $H^{\pm}_{p}(\vec{k})$ بخش برهم‌کنشی هامیلتونی را نشان می‌دهد که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$H^{\pm}_{p}(\vec{k}) = \begin{bmatrix} 0 & \Delta_{11}(\vec{k}) \pm \Delta_{12}(\vec{k}) \\ \Delta^{*}_{11}(\vec{k}) \pm \Delta^{*}_{12}(\vec{k}) & 0 \end{bmatrix}$$

بلوک قطری شدن هامیلتونی ابررسانایی در معادلهٔ۱۱ بدان معنی است که امکان جفت‌شدن الکترون‌های موجود در بخش زوج و فرد، به‌خاطر تفاوت در عدد کوآنتومی ناشی از تقارن آینه‌ای، ممکن نیست. این قاعده منع نتیجه بسیار مهمی است که نشان می‌دهد جفت‌های کوپر نیز مانند پدیدهٔ تونل‌زنی کلین در گرافین دو لایه AA با این شاخص جدید کوآنتومی که در واقع خود یک نوع شاخص دستوارگی است، برچسب می‌شوند.

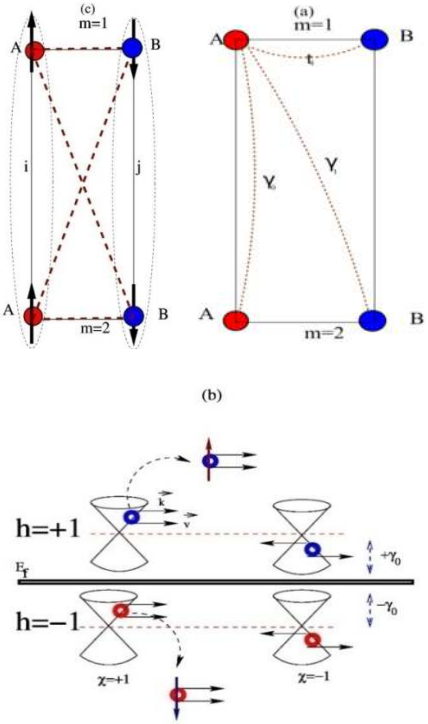
تقارن تابع موج زوج‌های کوپر، با کمینه کردن انرژی آزاد، به‌دست می‌آید. انرژی آزاد را گرافین دو لایه را می‌توان به‌صورت $F = F^{+} + F^{-} + F_0$ که در آن $F^{\pm}$ انرژی آزاد بخش‌های زوج/فرد می‌باشد و F_0 نیز انرژی چگالش سیستم می‌باشد. کمینه کردن انرژی آزاد منجر به‌رابطهٔ ویژه‌مقداری مشابه رابطهٔ زیر می‌گردد [۱۷]

$$\begin{bmatrix} A^{\pm} & B^{\pm} & B^{\pm} \\ B^{\pm} & C^{\pm} & D^{\pm} \\ B^{\pm} & D^{\pm} & C^{\pm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta^{\pm}_1 \\ \Delta^{\pm}_1 \\ \Delta^{\pm}_1 \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \Delta^{\pm}_1 \\ \Delta^{\pm}_1 \\ \Delta^{\pm}_1 \end{bmatrix}$$

که در آن $\Delta^{\pm}_i = \Delta_i + \Delta'_i$ می‌باشد. از حل عددی معادلهٔ فوق، می‌توان بررسی نمود کدام یک از تقارن‌های موج s، d، d+id و ... انرژی کمتری دارند. از آنجا که ساختارهای باند نرمال و ابررسانایی گرافین دو لایه، در واقع دو کپی مستقل تک‌لایه‌ای معادلهٔ۱۲، هستند لذا به‌نظر می‌رسد، رفتارهای مانند تقارن پارامتر نظم ابررسانایی گرافین دو لایه مشابه گرافین تک لایه می‌باشد [۲۰,۲۱]. با این حال در گرافین دو لایه خواص مضاعفی مانند اثر هال غیر متعارف و پدیده تونل‌زنی کلین[۱۶] نسبت به گرافین تک لایه مشاهده می‌شود.

در اینجا، نتیجه مهمی که از بلوک قطری شدن هامیلتونی ابررسانایی به‌دست می‌آید این است که زوج‌های کوپر شکل و شمایل متفاوتی با گرافین تک‌لایه دارند. شکل کلی یک زوج کوپر در شکل۳ج نشان داده شده است. این زوج‌های کوپر با یک درجهٔ آزادی مضاعف که ناشی از تقارن آینه‌ای است برچسب می‌شوند.

آنچه که در این مقاله به‌آن پرداخته شد نشان می‌دهد شاخصی که در مقالات مراجع [۱۸و۱۶] به‌آن تحت عنوان شاخص مخروطی اشاره شده است در واقع عدد کوآنتومی ناشی از تقارن آینه است و دیده می‌شود که این شاخص علاوه بر پدیده کلاین، در مبحث ابررسانایی نیز نقش داشته باشد. جفت‌شدگی بین شبه‌ذرات با شاخص تقارنی زوج و فرد متفاوت، ناممکن است. این قاعدهٔ منع، اصل مهمی در ارتباط با پدیده‌های ابررسانایی در گرافین دو لایه AA می‌باشد و می‌تواند به‌صورت تجربی مشاهده گردد. به‌لحاظ ریاضی، شباهت آموزشی مفیدی بین تبدیل بوگلیبف استفاده شده در اینجا برای حل معادلهٔ گاف ابررسانایی و حل معادله دیراک در QED وجود دارد. این تبدیل به‌لحاظ ریاضی، مشابه تبدیلی یکانی‌ای است که نمایش چهار مؤلفه‌ای دیراک را به‌نمایش تقلیل‌ناپذیر دو مؤلفه‌ای وایل، در فضای اسپینورهای چپگرد و راستگرد وایل، تبدیل می‌کند. این مسأله بسیار مهمی است که گرچه در برخی مقالات [۱۸و۱۶]، صرفاً از روی علامت‌های ظاهر شده در ویژه‌حالت‌های معادلهٔ شرودینگر، آثار و نتایج آن دیده شده است، با این حال به منشأ آن توجه نشده است. این موضوعی منحصر به‌فرد است و در مقالات از کنار آن عبور شده است. این موضوع چرایی نتایج مقاله [۱۸] را که در آن در برخی حالت‌ها امکان بازتاب بین مخروطی آندریف وجود ندارد و در برخی موارد، این امکان وجود دارد را با توجه به شکست تقارن آینه‌ای توجیه می‌کند



شکل۳الف. اتم‌های کربن جایگاه A و B لایه بالا $m = 1$ و پایین $m = 2$، با رنگ های قرمز و آبی متمایز شده‌اند. پارامتر انتگرال جهش درون لایه‌ای بین نزدیکترین همسایه اول، با t و بین لایه‌ای بین جایگاه‌های یکسان مستقیم با γ_0 و بین لایه‌ای بین دو جایگاه متفاوت با γ_1 نشان داده شده است.

شکل۳ب. مخروط‌های دیراک که علاوه بر شاخص دستوارگی با یک عدد کوانتومی جدید $h = \pm 1$ برچسب شده اند. این مخروط‌ها به‌اندازهٔ γ_0 بالا و پایین سطح فرمی هستند. **ج**)ساختار یک جفت کوپر با $4e^-$. شبه‌اسپین‌های بالا و پایین شبکه گرافین دولایه با بیضی های **i** و **j** نشان داده شده‌اند.

شکل۳ج. ساختار یک جفت کوپر با $4e^-$. شبه‌اسپین‌های بالا و پایین شبکه گرافین دولایه با بیضی های **i** و **j** نشان داده شده‌اند.

نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی خواص ابررسانایی در گرافین دولایه AA پرداخته شده است. گرافین دولایه، نسبت به گرافین تک‌لایه، دارای خواص مضاعف و جالب توجهی می‌باشد. در این پیش نویس، با بازخوانی نمایش تقلیل‌پذیر دیراک، در فضای اسپینورهای چهار مؤلفه‌ای و نمایش تقلیل ناپذیر وایل، در حل معادلات کوآنتوم نسبیتی و ظهور شاخص دستوارگی چپگرد و راستگرد برای اسپینورهای دو مؤلفه‌ای وایل، نشان داده شده است

که چگونه می‌توان با استفاده از خاصیت تقارن آینه‌ای و ریاضیاتی مشابه مکانیک کوآنتومی نسبیتی، ساختار نواری گرافین دولایه AA را به دو بخش تقارنی زوج و فرد تقسیم نمود. دو الکترون با اسپین‌های یکسان، یکی از لایهٔ بالا و یکی از لایهٔ پایین با قرار گرفتن در اربیتال‌هایی مشابه اربیتال مولکولی پیوندی و پاد پیوندی، بخش زوج و فرد ساختار باند را تشکیل می‌دهند. این رفتار جمعی ناشی از تقارن آینه‌ای، منجر به‌تشکیل شبه‌ذراتی در گرافین دولایه می‌گردد که علاوه بر هلیسیتی معروف گرافین تک لایه، ناشی از ساختار شش‌گوشی لانهٔ زنبوری، از یک شبه‌دستوارگی (کایرالیتی) دیگری، نیز برخوردار باشد که در اینجا شاخص دستوارگی آینه‌ای نامیده شد. دستوارگی معروف گرافین، در واقع نوعی هلیسیتی می‌باشد. اما از آنجا که در ذرات نسبیتی با جرم صفر مفاهیم هیلیسیتی و کایرالیتی معادل هستند، و نیز با توجه به‌این که ماتریس‌های پاولی نماینگر اسپین‌های واقعی نیستند بلکه شبه‌اسپین‌ها را مشخص می‌کنند، در مقالات مرتبط با گرافین، از این شاخص کوآنتومی با نام دستوارگی مطرح شده است. با این وجود، در گرافین دو لایهٔ AA واقعاً ذرات دارای یک عدد کوآنتومی معادل دستوارگی هستند که ماهیت آن متفاوت از دستوارگی مرسوم گرافین تک لایه بوده و ناشی از تقارن آینه‌ای می‌باشد. نسبت به این عدد کوآنتومی، نشان داده شد که زوج شدگی ابررسانایی تنها در بین شبه‌ذراتی اتفاق می‌افتد که شاخص دستوارگی آینه‌ای در آنها یکسان باشد. تقارن آینه‌ای از زوج‌شدگی شبه‌ذراتی با عدد دستوارگی آینه‌ای متفاوت، ممانعت می‌کند. به‌عبارتی دیگر، چهار الکترون دور هم گرد می‌آیند تا دو نوع از جفت‌های کوپری تشکیل دهند که دارای ماهیتی مشابه ذرات چپگرد و راستگرد باشند. این بدان معناست که درگرافین دو لایه AA دو نوع جفت کوپر متمایز وجود دارد. از لحاظ ریاضی می‌توان گرافین دو لایه را یک نوع ساختار گرافینی شکل تک لایه، در نظر گرفت که دو نوع شبه‌ذره چپ گرد و راستگرد در آن در حال حرکت هستند که یک نوع قاعده منع در آن، مانع برهم‌کنش بین آنها می‌گردد. این موضوع می‌تواند برخی نتایج به‌دست آمده از محاسبات ریاضی انجام شده برای بررسی خواص ابررسانایی ساختار دو لایه AA مانند بازتاب آندریف و نرمال را توجیه کند. از جمله قاعدهٔ منعی که در مرجع [۱۸] مطرح شده است، در حقیقت ناشی از تقارن آینه است که در صورت شکسته شدن تقارن آینه‌ای از بین رفته است. این موضوع، مسأله مهمی در مطالعه خواص نرمال و اندرکنشی گرافین دو لایه AA را مطرح می‌کند که به‌لحاظ تجربی ممکن است قابل مشاهده باشد. به‌ویژه اینکه به‌صورت تجربی، اینترکلیت کردن گرافین دو لایه منجر به ایجاد ساختار AA می‌گردد [۱۷].

نتایج این رهیافت به ساختارهای سه لایه‌ای AAA و ABA که در آنها امکان تقارن آینه‌ای، وجود دارد نیز قابلیت تعمیم دارد. پیش‌بینی می‌شود بحث‌هایی از قبیل ابررسانایی و تونل‌زنی کلین در این‌گونه لایه‌بندی‌های گرافینی، تفاوت های آشکاری با گرافین تک لایه داشته باشد. همچنین، اگر بتوان یک نوع هامیلتونی چهار الکترونی برای بررسی خواص ابررسانایی گرافین دو لایه نوشت ممکن است منجر به‌ظهور زوج‌های کوپری با $4e^-$ بار گردد که مشاهده هیجان‌انگیزی می‌تواند باشد.

مرجع‌ها

[1] Y. Cao, V. Fatemi, S. Fang, K. Watanabe, T. Taniguchi, E. Kaxiras, P. Jarillo-Herrero, Unconventional superconductivity in magic-angle graphene superlattices, Nat. 556 (2018) 43-50. https://doi.org/10.1038/nature26160

[2] Y. Cao, V. Fatemi, A. Demir, S. Fang, S.L. Tomarken, J.Y. Luo, J.D. Sanchez-Yamagishi, K. Watanabe, T. Taniguchi, E. Kaxiras, R.C. Ashoori, P. Jarillo-Herrero, Correlated insulator behavior at half-filling in magic-angle graphene

superlattices, Nat., 556 (2018) 80-84. https://doi.org/10.1038/nature26154 (2018)

[3] A.H. MacDonald, Bilayer Graphene's Wicked, Twisted Road, Phys. 12 (2019) 12.

[4] K. Kanetani, K. Sugawara, T. Sato, R. Shimizu, K. Iwaya, T. Hitosugi, T. Takahashi, Ca Intercalated Bilayer Graphene as a Thinnest Limit of Superconducting C6Ca, Proc. Natl. Acad. Sci., 109 (2012) 19610-19613. https://doi.org/10.1073/pnas.1208889109

[5] J. Chapman, Y. Su, C.A. Howard, D. Kundys, A. Grigorenko, F. Guinea, A.K. Geim, I.V. Grigorieva, R.R. Nair, Superconductivity in Ca-doped graphene laminates, Sci. Rep., 6 (2016) 23254. https://doi.org/10.1038/srep23254

[6] G. Chen, A.L. Sharpe, E.J. Fox, Y.-H. Zhang, S. Wang, L. Jiang, B. Lyu, H. Li, K. Watanabe, T. Taniguchi, Z. Shi, T. Senthil, D.K. Efetov, F. Wang, Signatures of tunable superconductivity in a trilayer graphene moiré superlattice, Nat., 572 (2019) 215–219. https://doi.org/10.1038/s41586-019-1393-y

[7] A.V. Rozhkov, A.O. Sboychakov, A.L. Rakhmanov, F. Nori, Electronic properties of graphene-based bilayer systems, Phys. Rep., 648 (2016) 1-104. https://doi.org/10.1016/j.physrep.2016.07.003

[8] P.L. de Andres, R. Ramírez, J.A. Vergés, Strong covalent bonding between two graphene layers, Phys. Rev. B, 77 (2008) 045430. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.77.045403

[9] J.K. Lee, S.C. Lee, J.P. Ahn, S.C. Kim, J.I.B. Wilson, P. John, The growth of AA graphite on (111) diamond, J. Chem. Phys., 129 (2008) 234709. https://doi.org/10.1063/1.2975333

[10] Z. Liu, K. Suenaga, P.J.F. Harris, S. Iijima, Open and closed edges of graphene layers, Phys. Rev. Lett., 102 (2009) 015501. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.015501

[11] A.L. Rakhmanov, A.V. Rozhkov, A.O. Sboychakov, F. Nori, Instabilities of the AA-stacked graphene bilayer, Phys. Rev. Lett., 109 (2012) 206801. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.206801

[12] A.O. Sboychakov, A.L. Rakhmanov, A.V. Rozhkov, F. Nori, Bilayer graphene can become a fractional metal, Phys. Rev. B, 103 (2021) L081106. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.103.L081106[

13] R.S. Akzyanov, A.O. Sboychakov, A.V. Rozhkov, A.L. Rakhmanov, F. Nori, AA-stacked bilayer graphene in an applied electric field: Tunable antiferromagnetism and coexisting exciton order parameter, Phys. Rev. B, 90 (2014) 155415. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.90.155415

[14] A.O. Sboychakov, A.V. Rozhkov, A.L. Rakhmanov, F. Nori, Antiferromagnetic states and phase separation in doped AA-stacked graphene bilayers, Phys. Rev. B, 88 (2013) 045409. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.88.045409

[15] A.O. Sboychakov, A.L. Rakhmanov, A.V. Rozhkov, F. Nori, Metal-insulator transition and phase separation in doped AA-stacked graphene bilayer, Phys. Rev. B, 87 (2013) 1401. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.87.121401

[16] M. Sanderson, Y.S. Ang, C. Zhang, Klein tunneling and cone transport in AA-stacked bilayer graphene, Phys. Rev. B 88 (2013) 245404. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.103.L081106

[17] R. Gholami, R. Moradian, S. Moradian, W.E. Pickett, Superconducting Symmetry Phases and Dominant bands in (Ca-) Intercalated AA-Bilayer Graphene, arXiv preprint, DOI arXiv:1904.02814(2019). [18] W.-T. Lu, Q.-F. Sun, Cone-dependent retro- and specular Andreev reflections in AA-stacked bilayer graphene, Phys. Rev. B, 108 (2023) 195425. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.108.195425

[19] M. Alidoust, A.-P. Jauho, J. Akola, Josephson effect in graphene bilayers with adjustable relative displacement, Phys. Rev. Res., 2 (2020) 32074. https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.2.032074

[20] A.O. Sboychakov, A.L. Rakhmanov, A.V. Rozhkov, Superconductivity and spin density wave in AA stacked bilayer graphene, Phys. E, 165 (2025) 116118. https://doi.org/10.1016/j.physe.2024.116118.

[21] M. Raczkowski, F.F. Assaad, M. IM, Hubbard model on the honeycomb lattice: From static and dynamical mean-field theories to lattice quantum Monte Carlo simulation, Phys. Rev. B, 101 (2020) 25103.

https://doi.org/10.1103/PhysRevB.101.125103
[22] R. Gholami, Graphene Boron Nitride electronic structure in the framework of Realistic Tight binding Model [In Persian], J. Res. Many-Body Syst 12 (2022) 51-65. https://doi.org/10.22055/JRMBS.2022.17348