Document Type: Full length research Paper
Pages: 49-67



# Shock wave structure in plasmas with regularized Kappa-distributed electrons

**Mostafa Mehdipoor***

Department of Physics, Faculty of Science, Gonbad Kavous University, Gonbad Kavous, Iran

Received:05/11/2024 Final revised:28/12/2024 Accepted: 21/07/2025

DOI: 10.22055/jrmbs.2025.20178

## Abstract

In this study, the structure of ion-acoustic shock waves in an unmagnetized plasma consisting of warm ions and regularized Kappa-distributed electrons has been investigated. Using the reductive perturbation method, the nonlinear Korteweg-de Vries-Burgers (K-dVB) equation is derived for the dynamics of ion-acoustic shock waves. Here, the dissipation generated by the ion kinematic viscosity is also considered. The analytical solution of the K-dVB equation is obtained by employing the tangent hyperbolic (Tanh) method. In addition, the analytical conditions for the propagation of oscillatory and monotonic shock structures are also discussed in detail. It is observed that when the viscosity of the plasma medium is fairly small, the oscillating shock waves will be able to propagate in the present plasma medium. Furthermore, it is seen that the regularized Kappa-distributed electrons can modify the structure of shock waves. In other words, both positive and negative amplitude shock waves can be propagated in the present plasma model. The dependence of shock structures on the parameters related to electron distribution (i.e., $\kappa$ and $\alpha$) and the kinematic viscosity of ions are also discussed. The results of this study may be useful for understanding nonlinear phenomena in space/astrophysics plasmas where regularized Kappa distributed electrons are assumed.

**Keywords:** Ion-acoustic shock waves, Regularized kappa distribution, K-dV Burger equation, Dispersive effects.

* Corresponding Author: mehdipoor.m59@gmail.com

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

مقاله پژوهشی کامل



# ساختار موج ضربه در پلاسماهایی با توزیع کاپای منظم شده

**مصطفی مهدی پور***

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه گنبد کاووس، گنبد کاووس، ایران

دریافت:۱۴۰۳/۰۸/۱۵ ویرایش نهائی: ۱۴۰۳/۱۰/۰۸ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۴/۳۰

DOI: 10.22055/jrmbs.2025.20178

**چکیده**

در این پژوهش، ساختار امواج یون–صوتی ضربه‌ای در یک پلاسمای غیرمغناطیسی شامل یون‌های گرم و الکترون‌هایی با توزیع کاپای منظم شده بررسی شده است. با به‌کار بردن روش اختلال کاهشی، معادلهٔ غیرخطی کورته وگ– دوری برگرز (K-dVB) برای دینامیک امواج یون–صوتی ضربه‌ای تعیین شده است. در اینجا، اتلاف ایجاد شده به‌وسیلهٔ چسبندگی سینماتیکی یون نیز در نظر گرفته شده است. جواب تحلیلی معادلهٔ غیرخطی K-dVB به‌کمک روش تانژانت هایپربولیک تعیین شده است. علاوه‌براین، جزئیات شرایط انتشار موج ضربه‌ای به‌صورت نوسانی و یا یکنواخت نیز به‌صورت تحلیلی بررسی شده است. مشاهده می‌شود که اگر چسبندگی محیط پلاسما نسبتاً کوچک باشد، امواج ضربه‌ای نوسانی قابلیت انتشار در محیط پلاسمای مد نظر را خواهند داشت. همچنین مشاهده می‌شود که الکترون‌هایی با توزیع کاپای منظم شده می‌توانند ساختار امواج ضربه‌ای را تصحیح کنند. به‌عبارت دیگر، هر دو موج ضربه‌ای با دامنهٔ مثبت و منفی قابلیت انتشار در محیط پلاسمای حاضر را دارند. وابستگی ساختار موج ضربه‌ای به پارامترهای مربوط به توزیع الکترون‌ها ($\kappa$ و $\alpha$) و ضریب چسبندگی یون‌ها نیز مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج پژوهش حاضر می‌تواند در درک پدیده‌های الکتروستانیکی غیرخطی در پلاسماهای فضایی با الکترون‌های دارای توزیع کاپای منظم شده مفید باشند.

**کلیدواژگان:** امواج ضربه‌ای یون–صوتی، توزیع کاپای منظم شده، معادله K-dVB، اثرات پراکندگی

## مقدمه

امواج یون–صوتی یکی از مهم‌ترین نوسانات فرکانس پایین در پلاسماهای آزمایشگاهی و فضایی هستند. این امواج اولین بار توسط ایکیز و همکاران [۱] به‌صورت آزمایشگاهی مشاهده شده بودند. از مرسوم‌ترین روش‌ها برای مطالعهٔ تئوری امواج یون–صوتی روش‌های پتانسیل سقدیف [۲] و اختلال کاهشی [۳] می‌باشند. در چنین شرایطی معمولاً الکترون‌ها از توزیع ماکسولی تبعیت می‌کنند [۴] و ساختار امواج یون–صوتی (با دامنهٔ دلخواه و یا دامنهٔ کوچک اما محدود) از طریق روش‌های ذکر شده مورد بررسی قرار می‌گیرد. با این‌حال، در سیستم‌هایی با برد بلند و یا دور از تعادل گرمایی، توزیع سرعت ذرات ماکسولی نبوده و اغلب با توزیع‌های غیرماکسولی بیان می‌شوند. چنین توزیع‌های غیرماکسولی در پلاسماهای فضایی و اختر فیزیکی بسیار رایج بوده و از مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به‌توزیع نافزون‌ور $q$ [۵]، توزیع

* نویسنده مسئول: mehdipoor.m59@gmail.com

باز نشر این مقاله با ذکر منبع آزاد است.
این مقاله تحت مجوز کریتیو کامنز تخصیص ۴.۰ بین‌المللی می‌باشد

استاندارد کاپا $\kappa$ [۶]، توزیع غیرگرمایی $\alpha$ [۷] و توزیع ترکیبی کاپا-کرنز [۸] اشاره کرد. مطالعات زیادی روی ساختار امواج یون-صوتی با در نظر گرفتن توزیع‌های فوق برای الکترون‌ها انجام شده است [۱۶-۹]. توزیع کاپا اولین بار توسط وسیلیونس [۶] با هدف توصیف مشاهدات تجربی و ماهواره‌ای پلاسماهای دور از تعادل گرمایی نظیر پلاسمای موجود در بادهای خورشیدی [۱۷]، مگنتوسفر زمین [۱۸]، محیط بین ستارگان [۱۹] و مگنتوسفر برخی سیارات [۲۰] معرفی شده بود. باید دقت کنیم که برای داشتن نتایج فیزیکی معتبر در این توزیع، شرط $\kappa > 3/2$ همواره باید رعایت شود. با این‌حال، اخیراً مطالعات تجربی و تئوری زیادی انجام شده که حالت $\kappa > 0$ را گزارش کرده‌اند. به‌عبارت دیگر، برای رفع محدودیت $\kappa > 3/2$، توزیع مناسبی به‌نام توزیع کاپای منظم شده [۲۱] در نظر گرفته شده است. در این توزیع، با معرفی یک تابع نمایی قطع، دنباله‌ای از ذرات پرانرژی ساخته می‌شود که گشتاورهای سرعت را برای تمام مقادیر $\kappa$ معتبر می‌کند. شکل این تابع توزیع به‌صورت زیر بیان می‌شود [۲۱]:

$$f_{RK}(v) = \frac{n_{e0}}{(\pi\kappa\theta^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\mathrm{U}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}-\kappa;\alpha^2\kappa\right)}\left(1+\frac{v^2}{\kappa\theta^2}\right)^{-(\kappa+1)}\times\exp\left(-\alpha^2\frac{v^2}{\theta^2}\right) \quad (۱)$$

طوری‌که $\mathrm{U}(a,b,c)$ به‌عنوان تابع کومر[1] معرفی می‌شود [۲۲]. در اینجا، $n_{e0}$ چگالی مختل نشده الکترون‌ها و کمیت $\theta = [(1-\frac{3}{2\kappa})(2K_BT_e/m_e)]^{1/2}$ سرعت گرمایی است که در آن $K_B$ ثابت بولتزمن، $T_e$ دمای الکترون و $m_e$ جرم الکترون می‌باشد. پارامترهای $\kappa$ و $\alpha$ به‌ترتیب به‌عنوان شاخص طیفی و پارامتر قطع معرفی می‌شوند که دو فاکتور مهم در این توزیع هستند. در حالت حدی $\alpha = 0$، رابطهٔ ۱ به‌توزیع استاندارد کاپا میل می‌کند و در شرایط $\alpha = 0$ و $\kappa \to \infty$، توزیع کاپای منظم توصیف شده توسط معادلهٔ ۱)، به توزیع ماکسولی منجر می‌شود.

باید دقت کنیم که حضور جمله نمایی وابسته به $\alpha$ به‌عنوان فاکتور منظم‌سازی سبب می‌گردد که توزیع فوق برای تمام مقادیر کاپا معتبر باشد و مشکل موجود (واگرایی دما) در توزیع کاپای استاندارد را برطرف نماید. در ادامه جزئیات این کار به‌صورت مختصر شرح داده شده است:

می‌دانیم که فشار گرمایی از گشتاور دوم تابع توزیع به فرم $p_0 = m/3 \iiint v^2 f_{RK}(v) d^3v$ به‌دست می‌آید. بنابراین با توجه به تابع توزیع داده شده در رابطهٔ ۱، فشار مؤثر برای توزیع کاپای منظم شده به‌شکل زیر تعیین می‌شود [۲۳]

$$p_0^{RK} = n_0 K_B T_e \frac{\kappa \mathrm{U}\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}-\kappa;\alpha^2\kappa\right)}{\mathrm{U}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}-\kappa;\alpha^2\kappa\right)} \quad (۲)$$

بنابراین دمای مرتبط با این توزیع نیز به‌صورت زیر داده خواهد شد [۲۳]:

$$T_0^{RK} = T_e \frac{\kappa \mathrm{U}\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}-\kappa;\alpha^2\kappa\right)}{\mathrm{U}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}-\kappa;\alpha^2\kappa\right)} \quad (۳)$$

اکنون با توجه به‌روابط فوق، می‌توان نتیجه گرفت که در حالت $\alpha = 0$، چون $\mathrm{U}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}-\kappa;0\right) =$

[1] Kummer

$\mathrm{U}\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}-\kappa;0\right)=$ و $\Gamma(\kappa-1/2)/\Gamma(\kappa+1)$ $\Gamma(\kappa-3/2)/\Gamma(\kappa+1)$ لذا دما برای توزیع کاپای استاندارد به‌فرم $T_0^{\kappa}=\kappa T_e/(\kappa-3/2)$ به‌دست می‌آید. رابطهٔ اخیر نشان می‌دهد که دما در حالت توزیع کاپای استاندارد اولاً به‌ازای $\kappa=3/2$ واگرا و ثانیاً برای مقادیر $\kappa<3/2$ منفی می‌باشد. همچنین فشار نیز به‌ازای $\kappa<3/2$ تعریف نشده است. حال آنکه به‌دلیل حضور پارامتر قطع $\alpha$، چنین محدودیت‌هایی در توزیع کاپای منظم شده دیده نمی‌شود و این توزیع برای کلیهٔ مقادیر کاپا معتبر است.

مطالعات زیادی روی ساختار امواج یون–صوتی در حضور الکترون‌هایی با توزیع کاپای منظم شده انجام شده است. لیو[1] [۲۳] ساختار امواج یون–صوتی را در یک پلاسمای دو مؤلفه‌ای شامل یون‌های سرد و الکترون‌های با توزیع کاپای منظم بررسی کرده است. با استفاده از روش پتانسیل سقدیف، او مشاهده کرد که در حالت $\kappa<1.5$ فقط سالیتون‌های یون–صوتی با پتانسیل مثبت وجود خواهند داشت. علاوه براین، او مشاهده کرد که وقتی شاخص طیفی کاپا کمتر از ۱٫۵ باشد، خواص امواج یون–صوتی کاملاً متفاوت خواهد بود. بارزترین تفاوت نسبت به‌حالت قبل آن بود که در شرایطی که کاپا به‌حد کافی کوچک باشد امواج یون–صوتی با پتانسیل منفی حضور خواهند داشت. همچنین آنها گزارش کردند که سرعت سالیتون‌ها با افزایش کاپا کاهش می‌یابد.

علاوه براین، ساختار امواج سالیتونی K-dV در یک پلاسمای غیرمغناطیده با یون‌های سرد و الکترون‌های غیرماکسولی (با توزیع کاپای منظم شده) توسط لو و لیو[2] [۲۴] بررسی شده بودند. آنها با استفاده از روش اختلال کاهشی، معادلهٔ غیرخطی K-dV را برای توصیف امواج یون–صوتی تعیین و دریافتند که چنانچه پارامتر قطع $\alpha$ افزایش یابد، دامنه و پهنای هر دو سالیتون‌های تراکمی (امواج با دامنه مثبت) و انبساطی (امواج با دامنهٔ منفی) کاهش می‌یابد. علاوه براین، آنها مشاهده کردند که به‌ازای یک مقدار مشخص از کاپا، سالیتون‌های دامنهٔ مثبت (منفی) در مقادیر بزرگتر (کوچکتر) $\alpha$ ظاهر خواهند شد. محققین دیگری نیز خواص سایر امواج غیرخطی از قبیل امواج یون–صوتی غبارآلود [۲۵] و الکترون–صوتی [۲۶] را در حضور الکترون‌هایی با توزیع کاپای منظم شده بررسی کرده بودند. در مرجع [۲۵]، محققین با نوشتن معادلات سیالی برای یون‌ها در حضور الکترون‌هایی با توزیع کاپای منظم شده و ذرات غبار آلود منفی ساکن، ساختار امواج یون–صوتی غبارآلود را بررسی کرده بودند. آنها با استفاده از روش اختلال کاهشی، ابتدا معادلهٔ غیرخطی K-dV و سپس فرم اصلاح شده آن (mK-dV) را تعیین کردند. آنها مشاهده کردند که دامنه و پهنای سالیتون‌های K-dV با افزایش شاخص طیفی کاپا $\kappa$ و پارامتر قطع $\alpha$ ، افزایش می‌یابند. درحالی‌که، برای سالیتون‌های K-dV اصلاح شده، دامنه با کاهش $\kappa$ و $\alpha$، افزایش خواهد یافت. ویژگی‌های موج غیرخطی الکترون–صوتی در حضور الکترون‌هایی با توزیع کاپای منظم شده نیز در مرجع [۲۶] مطالعه شده بود. آنها با در نظر گرفتن دو گونه الکترون‌های سرد و داغ و یون‌های ثابت، امواج الکترون–صوتی را مورد ارزیابی قرار داده بودند. در اینجا، الکترون‌های داغ از توزیع کاپای منظم شده تبعیت می‌کردند. با نوشتن معادلات سیالی برای الکترون‌های سرد و استفاده از روش اختلال کاهشی،

[1] Liu

[2] Lu and Liu

معادله K-dV برای توصیف امواج الکترون–صوتی تعیین شده بود. آنها دریافتند که فقط موج سالیتونی انبساطی ( با پتانسیل منفی) در این مدل وجود دارد. همچنین آنها گزارش کردند که دامنه و پهنای سالیتون الکترون–صوتی با افزایش پارامتر قطع $\alpha$، کاهش می‌یابد.

باید دقت کنیم که کلیهٔ مطالعات فوق درخصوص انتشار امواج سالیتونی (پایدار) در یک پلاسما و در حضور الکترون‌های پرانرژی با توزیع کاپای منظم شده هستند. چنین امواجی از توازن بین اثرات غیرخطی که سبب تغییر شکل یا کج شدن موج می‌شوند با اثرات پاشندگی که منجر به پهن شدن موج می‌گردند، ایجاد می‌شوند. با این‌حال، لازم به‌ذکر است که در حضور اثرات اتلافی ساختار چنین امواجی به‌شدت تغییر خواهند کرد. آثار اتلافی در محیط پلاسما بعضاً به‌دلیل برخورد بین ذرات، میرایی لانداو و یا چسبندگی محیط ظاهر می‌شوند. در این پژوهش، ما اثرات چسبندگی یون‌ها را در نظر گرفته‌ایم. در حقیقت با وارد کردن اثرات چسبندگی در معادلهٔ حرکت یون‌ها می‌خواهیم امواج یون–صوتی ضربه‌ای را که به‌دلیل توازن بین غیرخطی و پراکندگی در محیط پلاسما ایجاد می‌گردند را مورد ارزیابی قرار دهیم.

مطالعات زیادی ویژگی امواج ضربه‌ای را در پلاسماهایی با توزیع استاندارد کاپا بررسی کرده‌اند. به‌عنوان مثال، امواج یون–صوتی ضربه‌ای در یک پلاسمای سه مؤلفه‌ای شامل الکترون–پوزیترون–یون توسط شاه و سعید [۲۷] بررسی شده بود. آنها یون‌ها را نسبیتی و الکترون‌ها و پوزیترون‌ها را غیرگرمایی با توزیع کاپا فرض کرده بودند. در این مقاله، به‌کمک روش اختلال کاهشی، معادلهٔ غیر خطی K-dV برگرز (K-dVB) به‌صورت تحلیلی تعیین و اثرات پارامترهای موجود در پلاسما بر روی شدت ضربه بررسی شده بود. آنها دریافتند که با افزایش غلظت پوزیترون‌ها، فاکتور نسبیتی یون‌ها و دمای الکترون‌ها شدت موج ضربه‌ای کاهش می‌یابد. از سوی دیگر، مشاهده شده بود که با افزایش چسبندگی یون‌ها و شاخص طیفی الکترون‌ها و پوزیترون‌ها ($\kappa_p$ و $\kappa_e$)، دامنهٔ ضربه افزایش خواهد یافت.

حسین و همکاران [۲۸] نیز ساختار امواج یون–صوتی ضربه‌ای را در یک پلاسمای سه مؤلفه‌ای که در آن الکترون‌ها و پوزیترون‌ها از توزیع کاپا تبعیت می‌کنند را مطالعه کرده‌اند. آن‌ها با نوشتن معادلات سیالی برای یون‌ها در فضای دو بعدی و استفاده از روش اختلال کاهشی، معادلهٔ غیرخطی دو بعدی K-PB[1] را تعیین و جزئیات امواج ضربه‌ای یکنواخت و نوسانی را مورد ارزیابی قرار داده بودند. آنها دریافتند که با افزایش چگالی پوزیترون‌ها شدت موج ضربه افزایش خواهد یافت. از سوی دیگر، آنها مشاهده کردند که با افزایش شاخص طیفی پوزیترون‌ها، شدت موج ضربه افزایش و پهنای آن کاهش خواهد یافت.

علاوه براین، اخیراً امواج ضربه‌ای یون–صوتی در یک پلاسمای سه مؤلفه‌ای برخوردی با توزیع کاپا برای الکترون‌ها و پوزیترون‌ها توسط مهدی‌پور [۲۹] مطالعه شده بود. او برخورد بین یون‌ها با ذرات خنثی را نیز لحاظ کرده بود. با تعیین معادلهٔ K-dV برگرز میرا شده، نتایج عددی نشان دادند که پارامترهای موجود در پلاسما از قبیل نسبت چگالی ذرات، دمای الکترون به پوزیترون و فرکانس برخورد نقش به‌سزایی روی اصلاح خواص امواج ضربه‌ای دارند. رفتار امواج ضربه‌ای در یک

[1] Kadomtsev-Petviashvili-Burgers

پلاسمای غبارآلود شامل یون‌های متحرک، الکترون‌های دو دمایی با توزیع کاپا و ذرات غبار ساکن توسط الام و همکاران [۳۰] بررسی شده بود. آن‌ها با تعیین معادلهٔ برگرز اثرات توزیع دو دمایی الکترون‌ها و چسبندگی یون‌ها را مطالعه کرده بودند. برای درک ویژگی‌های امواج سالیتونی و ضربه‌ای یون–صوتی غبارآلود در یک پلاسمای چند مؤلفه‌ای، رحمان[۳۱] یک مطالعه تئوری را در یک پلاسما شامل یون‌های منفی ماکسولی، الکترون‌های پرانرژی با توزیع کاپا، ذرات غبارآلود ساکن و یون‌های مثبت سیالی انجام داده بود. آن‌ها با استفاده از روش اختلال کاهشی، معادلات کورته وگ–دوری K-dV، کورته وگ–دوری اصلاح شده mK-dV و برگرز (Burgers) را تعیین و نشان دادند که حضور الکترون‌های پرانرژی با توزیع کاپا ساختار امواج سالیتونی و ضربه‌ای یون–صوتی غبارآلود را به‌شدت تحت تأثیر قرار می‌دهند. محققین دیگری نیز مطالعاتی برروی ساختار امواج ضربه‌ای یکنواخت و نوسانی در پلاسماهایی با توزیع کاپا انجام داده بودند [۳۵-۳۲].

چنانچه قبلاً ذکر شد تمرکز عمده مطالعات فوق روی انتشار امواج یون–صوتی ضربه‌ای در یک پلاسما با توزیع استاندارد کاپا برای الکترون‌ها می‌باشد. بر طبق اطلاعات نویسنده تاکنون هیچ موردی برای انتشار امواج یون–صوتی ضربه‌ای در یک پلاسما با توزیع کاپای منظم شده گزارش نشده است. لذا هدف مقاله حاضر، بررسی امواج ضربه‌ای در یک پلاسمای دو مؤلفه‌ای شامل یون‌های گرم و الکترون‌هایی با توزیع کاپای منظم شده می‌باشد، طوری‌که اثرات چسبندگی یون‌ها نیز لحاظ شده است. لذا در این مقاله سعی شده بعد از بیان معادلات اساسی و تعیین معادلهٔ حاکم بر امواج ضربه‌ای، جواب‌های این معادله تعیین و شرایط وجود امواج ضربه‌ای یکنواخت یا نوسانی مورد بررسی قرار گیرد. نشان خواهیم داد که پارامترهای مرتبط با توزیع کاپای منظم شده و چسبندگی یون‌ها نقش به‌سزایی برروی ساختار امواج ضربه‌ای دارند. اکنون جزئیات پژوهش حاضر را معرفی خواهیم کرد. ابتدا، معادلات اساسی سیال یونی در یک پلاسمای دو مؤلفه‌ای با در نظر گرفتن توزیع کاپای منظم شده برای الکترون‌ها ارائه می‌شوند. سپس، با استفاده از روش اختلال کاهشی، معادلهٔ تحول سیستم تعیین می‌گردد. جواب این معادله و شرایط وجود امواج ضربه‌ای نوسانی یا یکنواخت مطالعه می‌شوند. در نهایت، به‌اختصار نتایج حاصل از این کار ارائه خواهد شد.

## معادلات حاکم بر مدل

در این تحقیق، به‌کمک معادلات سیالی، انتشار امواج ضربه‌ای یون–صوتی در یک پلاسمای دو مؤلفه‌ای غیرمغناطیده غیربرخوردی شامل یون‌های گرم و الکترون‌های غیرحرارتی با توزیع کاپای منظم [۲۱] بررسی شده است. در اینجا، اثرات چسبندگی یون‌ها نیز لحاظ شده است. در چنین شرایطی، دینامیک غیرخطی امواج ضربه‌ای یون–صوتی بر طبق معادلات بهنجار شده زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(nu)=0\,, \qquad ۴$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial \phi}{\partial x}--\frac{5}{3}\sigma n^{-\frac{1}{3}}\frac{\partial n}{\partial x}+\eta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad ۵$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}=n_e-n. \qquad ۶$$

طوری‌که چگالی بهنجار شده الکترون‌ها، به‌صورت زیر داده می‌شود [۲۱]:

$$n_e=1+b_1\phi+b_2\phi^2+\cdots$$

۷

که در آن

$$b_1 = \alpha^2 + \frac{\kappa-1/2}{\kappa} + \frac{3}{2}\alpha^2 U_5$$

۸

$$b_2 = \left(\frac{3/2-\kappa}{2\kappa} - \alpha^2\right)\frac{\kappa-1/2}{\kappa} + \left(\frac{\kappa-1/2}{\kappa} + \alpha^2\right) b_1 + \frac{15}{8}\alpha^4 U_7$$

۹

درحالی که $U_n$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U_n = \frac{U(n/2, n/2-\kappa; \alpha^2\kappa)}{U(3/2, 3/2-\kappa; \alpha^2\kappa)}$$

۱۰

به‌ازای n=5,7,9. در اینجا $U(a,b,z)$ به‌عنوان تابع Kummer U تعریف و به‌صورت زیر معرفی می‌شود:

۱۱

$$U(a,b,z) = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty t^{a-1}(1+t)^{b-a-1}e^{-zt}dt$$

در معادلات فوق، چگالی یون‌ها $n$ و الکترون‌ها $n_e$ به چگالی مختل نشده ذرات $n_0$ بهنجار شده است. سرعت $u$ به‌سرعت یون–صوتی $C_0 = (T_e/m_i)^{1/2}$، پتانسیل الکتریکی $\phi$ به $T_e/e$، زمان $t$ و مکان $x$ به‌ترتیب به فرکانس یونی $\omega_{pi} = (4\pi e^2 n_0/m_i)^{1/2}$ و طول دبای $\lambda_D = (T_e/4\pi e^2 n_0)^{1/2}$ بهنجار شده‌اند. پارامترهای $\kappa$ و $\alpha$ به‌ترتیب به‌عنوان شاخص طیفی توزیع کاپا و پارامتر قطع در پلاسما معرفی می‌شوند. باید دقت کنیم که وقتی $\alpha = 0$، معادلهٔ۷، به توزیع استاندارد کاپا منجر می‌شود که فقط به‌ازای مقادیر $\kappa > 3/2$ معتبر می‌باشد. با این حال، به‌ازای مقادیر $\alpha \neq 0$، توزیع کاپای بهنجار شده، برای تمام مقادیر کاپا $\kappa > 0$ برقرار می‌باشد. کمیت $\sigma = T_i/T_e$ به‌صورت نسبت دمای یون‌ها به الکترون‌ها معرفی می‌شود. همچنین $\eta$ نیز به‌عنوان ضریب چسبندگی سینماتیکی یون تعریف می‌شود و به $C_0\lambda_D$ بهنجار شده است.

## امواج غیرخطی: تعیین معادلهٔ حاکم بر تحول سیستم

برای تعیین معادلات حاکم بر تحول امواج غیرخطی در مدل پلاسمای حاضر، از روش اختلال کاهشی [۳] استفاده خواهیم کرد. برطبق این روش، ابتدا متغییرهای حالت پلاسما یعنی $n$ ، $u$ و $\phi$ به‌صورت زیر حول وضعیت تعادلی‌شان بسط داده می‌شوند:

$$S = S^{(0)} + \varepsilon S^{(1)} + \varepsilon^2 S^{(2)} + \cdots$$

۱۲

که در آن $S = \{n, u, \phi\}$ و $S^{(0)} = \{1, 0, 0\}$ حالت تعادلی سیستم است. سپس مختصات کند تغییر $\xi = \varepsilon^{1/2}(x - Vt)$ و $\tau = \varepsilon^{3/2}t$، (که در آن‌ها $\varepsilon$ به‌عنوان یک پارامتر کوچک که شدت غیرخطی سیستم را اندازه گیری می‌کند و $V$ بیانگر سرعت فاز امواج می‌باشد) را معرفی می‌کنیم. از سوی دیگر، در این مدل فرض می‌کنیم که مقیاس زمانی چسبندگی از فرکانس پلاسما خیلی کوچکتر می‌باشد بنابراین، برای داشتن یک تحلیل قابل قبول شرط $\eta = \varepsilon^{1/2}\eta_0$ را نیز لحاظ خواهیم کرد. حال، با جای‌گذاری بسط‌های فوق در معادلات ۴ تا ۷ و استفاده از مختصات کند تغییر فوق و جداکردن توان‌های مختلف $\varepsilon$، برای پایین‌ترین مرتبه خواهیم داشت:

$$-V\frac{\partial n^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} = 0$$

۱۳

$$-V\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \xi} + + \frac{5}{3}\sigma\frac{\partial n^{(1)}}{\partial \xi} = 0$$

۱۴

$$n^{(1)} = \left(\frac{\kappa-\frac{1}{2}}{\kappa} + \alpha^2\left[1 + \frac{3}{2}\frac{U\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}-\kappa; \alpha^2\kappa\right)}{U\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}-\kappa; \alpha^2\kappa\right)}\right]\right)\varphi^{(1)}$$

۱۵

با انتگرال گیری از معادلات ۱۵-۱۳ و به‌کار بردن شرایط مرزی $n^{(1)} \to 1$، $u^{(1)} \to 0$ و $\phi^{(1)} \to 0$ در صورتی که $\xi \to \pm\infty$، خواهیم داشت:

$$n^{(1)} = \frac{1}{V^2-\frac{5}{3}\sigma}\phi^{(1)} \qquad ۱۶$$

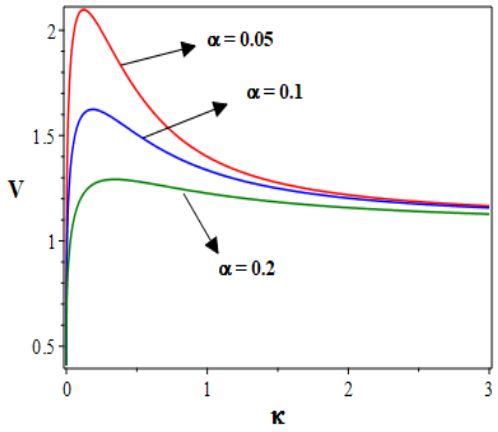
$$u^{(1)} = \frac{V}{V^2-\frac{5}{3}\sigma}\phi^{(1)} \qquad ۱۷$$

اکنون با جای‌گذاری رابطهٔ۱۶ در پایین‌ترین مرتبه معادلهٔ پواسون۱۵، سرعت فاز امواج به‌صورت زیر تعیین خواهد شد:

$$V = \left\{\frac{5}{3}\sigma + \frac{\kappa}{\kappa-\frac{1}{2}+\kappa\alpha^2\left(1+\frac{3}{2}U_5\right)}\right\}^{1/2} \qquad ۱۸$$

طوری‌که $U_5 = \frac{U\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}-\kappa;\ \alpha^2\kappa\right)}{U\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}-\kappa;\ \alpha^2\kappa\right)}$.

رابطهٔ۱۸ نشان می‌دهد که الکترون‌هایی با توزیع کاپای منظم شده تأثیر به‌سزایی بر روی سرعت فاز امواج دارند. در شکل۱ چگونگی تغییرات سرعت فاز با پارامترهای توزیع کاپای منظم شده ترسیم شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش شاخص طیفی کاپا، سرعت فاز ابتدا افزایش سپس کاهش و در نهایت تقریباً به یک مقدار ثابتی می‌رسد. این خاصیت به‌خاطر ارتباط بین سرعت فاز با پارامترهای توزیع الکترون می‌باشد که منجر به اصلاحاتی برروی سرعت فاز امواج ضربه‌ای می‌گردد. لازم به‌ذکر است که این نتیجه به‌شدت با شرایطی که در آن الکترون‌ها از توزیع استاندارد کاپا پیروی می‌کنند متفاوت می‌باشد. به‌عبارت دیگر، در مطالعات مرتبط با توزیع کاپای استاندارد، گزارش شده است که سرعت فاز امواج با افزایش شاخص طیفی کاپا، همواره کاهش می‌یابد. به‌عنوان مثال مرجع شمارهٔ۱۱ را ملاحظه کنید. از سوی دیگر، از شکل۱ مشاهده می‌شود که با کاهش پارامتر قطع $\alpha$، سرعت فاز امواج افزایش می‌یابد. به‌عبارت دیگر، افزایش $\alpha$ منجر به کاهش الکترون‌های پرانرژی و اصلاحاتی در فشار الکترون‌ها می‌گردد که نتیجهٔ آن کاهش سرعت فاز امواج می‌باشد.




**شکل۱.** تغییرات سرعت فاز برحسب شاخص طیفی کاپا به‌ازای مقادیر مختلف $\alpha$.

از مرتبهٔ دوم $\varepsilon$ معادلات زیر را به‌دست می‌آیند:

$$V\frac{\partial n^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \xi} = \frac{\partial n^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{\partial\left(n^{(1)}u^{(1)}\right)}{\partial \xi} \qquad ۱۹$$

$$V\frac{\partial u^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{5}{3}\sigma\frac{\partial n^{(2)}}{\partial \xi} = \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \tau} + u^{(1)}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{5}{9}\sigma n^{(1)}\frac{\partial n^{(1)}}{\partial \xi} - \eta_0\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial \xi^2} \qquad ۲۰$$

$$\left(\frac{\kappa-\frac{1}{2}}{\kappa} + \alpha^2\left[1+\frac{3}{2}\frac{U\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}-\kappa;\ \alpha^2\kappa\right)}{U\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}-\kappa;\ \alpha^2\kappa\right)}\right]\right)\varphi^{(2)} - n^{(2)} = G \qquad ۲۱$$

طوری‌که

$$G=\frac{\partial^2\varphi^{(1)}}{\partial\xi^2}-\frac{1}{2\kappa^2}\Big\{\kappa^2-\frac{1}{4}+2\alpha^2\kappa\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)\Big[1+\frac{3}{2}U_5\Big]+\kappa^2\alpha^4\Big[1+3U_5+\frac{15}{4}U_7\Big]\Big\}\left(\varphi^{(1)}\right)^2 \qquad ۲۲$$

با

$$U_7=\frac{U\left(\frac{7}{2},\ \frac{7}{2}-\kappa;\ \alpha^2\kappa\right)}{U\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}-\kappa;\ \alpha^2\kappa\right)} \qquad ۲۳$$

اکنون با ضرب معادله ۱۹ در $V$ و ترکیب آن با رابطهٔ ۲۰ و همچنین استفاده از معادلات ۱۶ و ۱۷، برای کمیت اختلالی $n^{(2)}$ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial n^{(2)}}{\partial\xi}=\frac{2V}{\left(V^2-\frac{5}{3}\sigma\right)^2}\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial\tau}+\frac{\left(3V^2-\frac{5}{9}\sigma\right)}{\left(V^2-\frac{5}{3}\sigma\right)^3}\phi^{(1)}\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial\xi}-\eta_0\frac{V}{\left(V^2-\frac{5}{3}\sigma\right)^2}\frac{\partial^2\phi^{(1)}}{\partial\xi^2}+\frac{1}{\left(V^2-\frac{5}{3}\sigma\right)}\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial\xi} \qquad ۲۴$$

حال با مشتق‌گیری از طرفین معادلهٔ ۲۱ نسبت به $\xi$، و استفاده از رابطهٔ ۲۴، یک معادله K-dVB برای مرتبه اول پتانسیل به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial\tau}+A\phi^{(1)}\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial\xi}+B\frac{\partial^3\phi^{(1)}}{\partial\xi^3}=C\frac{\partial^2\phi^{(1)}}{\partial\xi^2} \qquad ۲۵$$

لازم به‌ذکر است که در عبارت فوق، بنا به‌رابطهٔ پاشندگی۱۸، جملات حاوی پتانسیل اختلال $\phi^{(2)}$ حذف شده‌اند. در اینجا، ضرایب غیرخطی، پاشندگی و پراکندگی سیستم به‌ترتیب به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$A=\frac{3V}{2\left(V^2-\frac{5}{3}\sigma\right)}-\frac{5\sigma}{18V\left(V^2-\frac{5}{3}\sigma\right)}-\frac{b_2\left(V^2-\frac{5}{3}\sigma\right)^2}{V} \qquad ۲۶$$

$$B=\frac{\left(V^2-\frac{5}{3}\sigma\right)^2}{2V} \qquad ۲۷$$

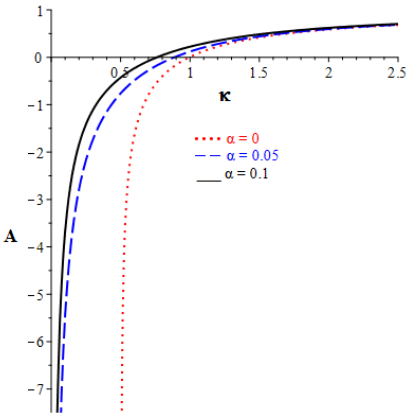
$$C=\frac{\eta_0}{2} \qquad ۲۸$$

لازم به‌ذکر است که معادلهٔ۲۵ به‌عنوان معادلهٔ غیرخطی کورته–وگ دوری برگرز (K-dVB) برای توصیف امواج ضربه‌ای در مدل پلاسمای حاضر در نظر گرفته می‌شود. به‌طور کلی، این موضوع به‌خوبی شناخته شده است که در امواج یون–صوتی لختی از طریق یون‌ها و نیروی بازگرداننده از فشار توزیع ماکسولی الکترون‌ها تأمین می‌شود. این امواج می‌توانند به‌صورت موج سالیتونی (پایدار) و یا ضربه‌ای در محیط پلاسما منتشر شوند. چنین امواج غیرخطی از توازن بین آثار مختلفی مانند غیرخطی، پاشندگی و پراکندگی در محیط پلاسما ایجاد می‌شوند. همان‌طور که قبلاً اشاره شد امواج سالیتونی (ضربه‌ای) از توازن بین آثار غیرخطی و پاشندگی (پراکندگی) در محیط پلاسما ایجاد می‌شوند. دینامیک حاکم بر تحول امواج سالیتونی از طریق معادله غیرخطی K-dV و امواج ضربه‌ای با معادله K-dVB توصیف می‌شود. باید دقت کنیم که عاملی که وجود امواج یون–صوتی ضربه‌ای در پلاسما را تثبیت می‌کند، چسبندگی یون‌ها است طوری که در غیاب اثرات چسبندگی ($\eta_0=0$)، معادلهٔ۲۵ به‌معادلهٔ شناخته شده کورته–وگ دوری (K-dV) برای توصیف امواج یون–صوتی سالیتونی منجر می‌شود. در حقیقت از طریق خاصیت چسبندگی یون‌ها یا همان میزان اتلاف می‌توان ساختار موج ضربه‌ای را کنترل کرد.

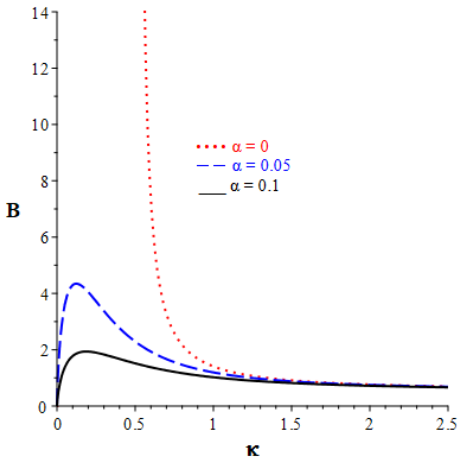
باید دقت کنیم که که هر دو ضریب غیرخطی $A$ و پاشندگی $B$ به‌پارامترهای مربوط به‌توزیع کاپای منظم شده (یعنی شاخص طیفی $\kappa$ و پارامتر قطع $\alpha$) وابسته هستند. شکل۲ چگونگی وابستگی این ضرایب به پارامترهای $\kappa$ و $\alpha$ را نشان می‌دهد. از شکل۲(الف)

مشاهده می‌شود که در حضور الکترون‌هایی با توزیع کاپای منظم، ضریب غیرخطی می‌تواند دارای مقادیر مثبت و منفی باشد. به‌عبارت دیگر، به‌ازای مقادیر کمتر از مقدار بحرانی کاپا $\kappa_c$ (یعنی مقدار شاخص طیفی که به‌ازای آن ضریب غیرخطی صفر می‌شود)، ضریب غیرخطی $A<0$است درحالی‌که، برای مقادیر بیشتر از $\kappa_c$، ضریب غیرخطی $A>0$ می‌باشد. این شرایط وجود امواج ضربه‌ای با دامنهٔ منفی (انبساطی) و مثبت (تراکمی) را در سیستم حاضر تأئید می‌کند. از سوی دیگر، نتایج عددی نشان می‌دهند که با افزایش پارامتر قطع $\alpha$، مقدار شاخص طیفی بحرانی $\kappa_c$ کاهش می‌یابد. به‌عنوان نمونه، به‌ازای $\alpha=0$، مقدار بحرانی شاخص طیفی تقریباً ۰٫۹ گزارش شده درحالی‌که برای $\alpha=0.1$، مقدار $\kappa_c=0.76$ تعیین می‌شود. علاوه براین، نتایج داده شده در شکل۲(الف) نشان می‌دهند که چنانچه مقادیر $\kappa>1.5$ لحاظ شوند، اولاً ضریب غیرخطی همواره مثبت است ثانیاً تغییرات آن به پارامتر قطع $\alpha$ وابستگی محسوسی ندارد. لازم به‌ذکر است که در این پژوهش، رفتار امواج ضربه‌ای در شرایطی که مقدار شاخص طیفی کاپا دقیقاً با مقدار بحرانی $\kappa_c$ یکسان است، بررسی نشده است. به‌عبارت دیگر، در حالتی که $\kappa=\kappa_c$، ضریب غیرخطی سیستم صفر شده و معادلهٔ۲۵ نمی‌تواند تحول حاکم بر امواج را به‌درستی توصیف کند. در این شرایط باید به‌سراغ مراتب بالاتر غیر خطی برویم. این موضوع در مطالعات بعدی مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

تغییرات ضریب پاشندگی $B$ برحسب شاخص طیفی کاپا و به‌ازای مقادیر مختلف پارامتر $\alpha$ نیز در شکل۲(ب) ترسیم شده است. مشاهده می‌شود که ضریب پاشندگی همواره مثبت است. باید دقت کنیم که در مطالعهٔ پدیده‌های غیرخطی، ضریب پاشندگی همواره با پهنای امواج متناسب است و از آنجائی‌که پهنا به‌عنوان یک کمیت فیزیک همواره مثبت است لذا مثبت شدن ضریب پاشندگی نیز به‌راحتی قابل توجیح می‌باشد. همچنین در حضور الکترون‌هایی با توزیع کاپای منظم شده، میزان پاشندگی محیط کمتر می‌گردد. علت این امر در حقیقت آن است که پارامتر قطع معرفی شده در توزیع کاپای منظم شده منجر به کاهش الکترون‌های پرانرژی می‌شود. در نتیجه فشار آن‌ها کمتر شده و این امر سبب می‌شود که پاشندگی امواج کاهش یابد. برای درک بیشتر، منحنی آبی و سیاه رنگ در شکل۲(ب) را با منحنی قرمز رنگ مقایسه کنید.




الف




ب

**شکل۲.** تغییرات ضرایب الف) غیرخطی $A$ و ب) پاشندگی $B$ برحسب شاخص طیفی کاپا به‌ازای مقادیر مختلف $\alpha$.

## جواب معادله K-dVB

ساختار موج ضربه‌ای توصیف شده توسط معادلهٔ۲۵ به‌شدت به‌مقادیر ضرایب $A$، $B$ و $C$ بستگی دارد. از آنجائی‌که ضرایب غیرخطی و پاشندگی به پارامترهای مرتبط با توزیع الکترون‌ها یعنی $\kappa$ و $\alpha$ و ضریب پراکندگی فقط به‌چسبندگی یون $\eta_0$ وابسته هستند، لذا ارتباط بین این پارامترها می‌تواند شرایط مختلفی را برای انتشار موج ضربه‌ای در مدل پلاسمای حاضر ایجاد کند. بنابراین، در ادامه جواب معادلهٔ۲۵ و خصوصیات آن را بررسی خواهیم کرد.

برای یافتن جواب معادلهٔ۲۵، فرض می‌کنیم هیچ یک از اثرات پاشندگی $B$ و یا اتلاف $C$، در محیط پلاسمای حاضر قابل صرف‌نظر کردن نباشند. ابتدا با تغییر چارچوب مرجع مختصات به چارچوب در حال حرکت با موج ضربه‌ای از طریق $\eta = m(\xi - U\tau)$ که $m$متناسب با عکس پهنای امواج و $U$ سرعت موج ضربه می‌باشد معادلهٔ۲۵ را می‌توانیم به‌فرم زیر بازنویسی کنیم:

$$-U\frac{d\phi^{(1)}}{d\eta} + A\phi^{(1)}\frac{d\phi^{(1)}}{d\eta} + Bm^2\frac{d^3\phi^{(1)}}{d\eta^3} - Cm\frac{d^2\phi^{(1)}}{d\eta^2} = 0 \qquad ۲۹$$

اکنون می‌خواهیم معادلهٔ فوق را با به‌کار بردن روش تانژانت هایپربولیک [۳۶] حل کنیم. برای این منظور با انتخاب $Y = \tanh\eta$ و اینکه $dY/d\eta = 1 - \tanh^2\eta$ از معادلهٔ۲۹ داریم:

$$\begin{aligned} -U\frac{d\phi^{(1)}}{dY} + A\phi^{(1)}\frac{d\phi^{(1)}}{dY} &+ Bm^2\left\{(1-Y^2)\frac{d}{dY}\left[(1-Y^2)\frac{d\phi^{(1)}}{dY}\right]\right\} \\ &- Cm\frac{d}{dY}\left[(1-Y^2)\frac{d\phi^{(1)}}{dY}\right] = 0 \end{aligned} \qquad ۳۰$$

اکنون با انتخاب بسط $\phi^{(1)} = \beta_0 + \beta_1 Y + \beta_2 Y^2$ و قرار دادن آن در معادلهٔ۳۰ و همچنین جداکردن توان‌های مختلف $Y$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{U}{A} + \frac{3C^2}{25AB} \\ \beta_1 &= -\frac{6C^2}{25AB} \\ \beta_2 &= -\frac{3C^2}{25AB} \\ m &= \frac{C}{10B} \end{aligned} \qquad ۳۱$$

بنابراین، جواب معادله K-dVB می‌تواند به فرم زیر بیان شود:

$$\phi^{(1)} = \frac{3C^2}{25AB}(1-\tanh^2\eta) + \frac{U}{A} - \frac{6C^2}{25AB}\tanh\eta \qquad ۳۲$$

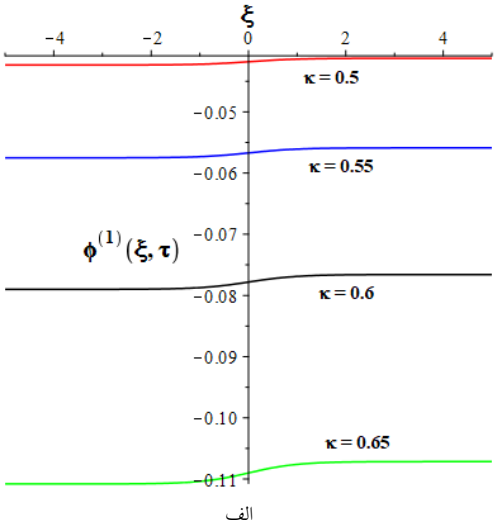
حال با به‌کار بردن شرایط $\phi^{(1)} = 0$ در حالت $\eta \to +\infty$، می توانیم سرعت $U$ را به فرم $U = \frac{6C^2}{25AB}$ تعیین و از آنجا جواب نهایی معادله ۲۹ را به صورت زیر بدست خواهیم آورد:

$$\phi^{(1)}(\xi,\tau) = \phi_m\left\{4 - \left[1+\tanh\left(\frac{\xi - U\,\tau}{\delta}\right)\right]^2\right\} \qquad ۳۳$$

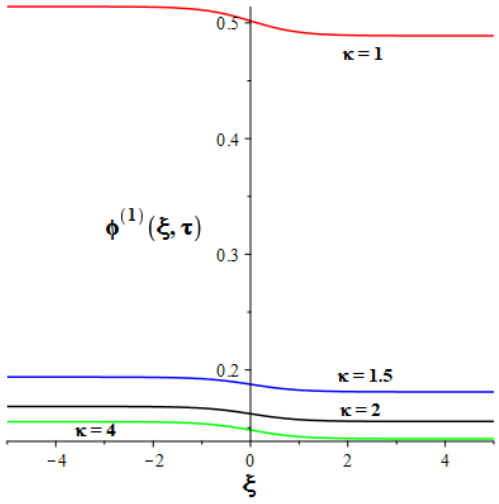
طوری‌که $\phi_m = 3C^2/25AB$ ، $\delta = 10B/C$ و $U = 6C^2/25B$ به ترتیب بیانگر دامنه، پهنا و سرعت موج ضربه‌ای هستند.

با توجه به نتایج داده شده در شکل۲، چون $B > 0$ است لذا پهنا و سرعت انتشار موج ضربه‌ای همواره یک مقدار مثبت خواهند بود. به عبارت دیگر، $U > 0$ در محیط پلاسمای حاضر بیان می‌کند که موج ضربه به سمت راست منتشر خواهد شد. بااین‌حال، با توجه به $\phi_m \propto 1/AB$ و مقادیر مثبت و منفی برای ضریب غیرخطی، به ترتیب وجود امواج ضربه‌ای با $\phi_m > 0$ یا $\phi_m < 0$ اثبات خواهند شد. درادامه، ساختار موج ضربه‌ای توصیف شده توسط معادله ۳۳ بر حسب پارامترهای موجود در محیط پلاسمای حاضر بررسی خواهد شد.

شکل ۳ نمایی از موج ضربه را برحسب مقادیر مختلف شاخص طیفی کاپا نشان می‌دهد. در اینجا سایر پارامترهای موجود در محیط پلاسما به صورت $\sigma = 0.01$، $\alpha = 0.05$ و $\eta_0 = 0.9$ درنظرگرفته شده‌اند. برطبق نتایج داده شده در شکل ۲ (الف)، مشاهده می‌شود که به ازای مقادیر کمتر از $\kappa_c \cong 0.88$ موج ضربه با دامنه منفی وجود خواهد داشت طوری‌که با افزایش مقدار $\kappa$، دامنه موج ضربه افزایش می‌یابد. جزئیات بیشتر در شکل ۳(الف) نشان داده شده است. از سوی دیگر، پروفایل موج ضربه به ازای مقادیر بزرگتر از $\kappa_c$ در شکل ۳(ب) مورد بررسی قرار گرفته است. مشاهده می‌شود که در این حالت دامنه مثبت موج ضربه، با افزایش $\kappa$، کاهش می‌یابد. دلیل فیزیکی این امر، داشتن وابستگی وارون دامنه موج ضربه به ضریب غیرخطی سیستم می‌باشد ( $\phi_m \propto 1/AB$). به عبارت دیگر، بر طبق نتایج داده شده در شکل۲(الف)، ضریب غیرخطی برای $\kappa < \kappa_c$ ($\kappa > \kappa_c$)، با افزایش کاپا کاهش(افزایش) می‌یابد. بنابراین دامنه موج ضربه افزایش (کاهش) خواهد یافت. به بیان دیگر، در حضور الکترونهای پرانرژی (مقادیر کمتر کاپا)، امواج ضربه‌ای دامنه مثبت (منفی) دارای دامنه بیشتری (کمتری) هستند.



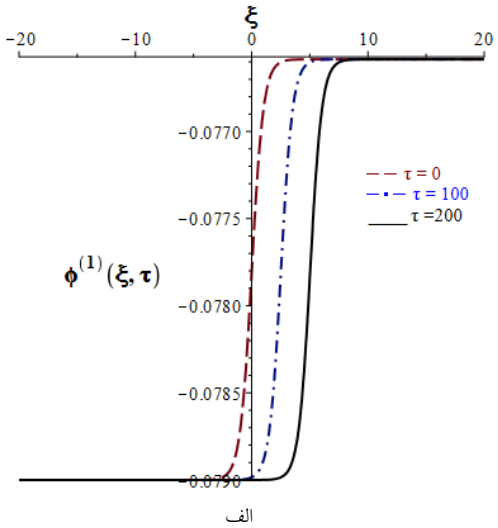
الف



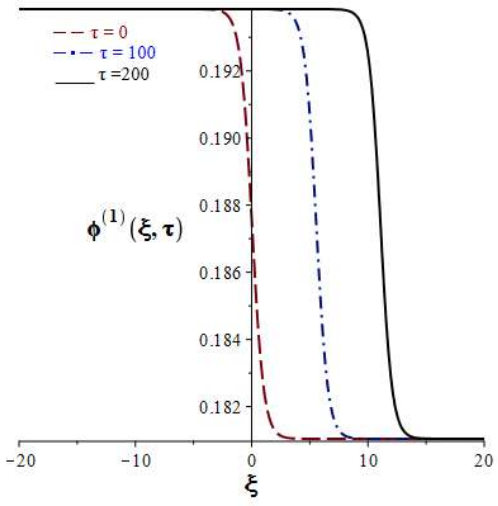

ب

**شکل۳.** پروفایل موج ضربه توصیف شده توسط معادله (۳۳) به ازای مقادیر مختلف شاخص طیفی $\kappa$. دراینجا $\sigma = 0.01$، $\alpha = 0.05$ و $\eta_0 = 0.9$ فرض شده‌اند.

اکنون پایداری امواج ضربه‌ای توصیف شده در این بخش را مورد ارزیابی قرار خواهیم داد. بدین منظور تحول زمانی موج ضربه‌ای توصیف شده توسط معادله ۳۳ را به صورت عددی بررسی خواهیم کرد. شکل ۴، تحول موج ضربه ای سیستم حاضر را به ازای زمان‌های مختلف به ترتیب در دو حالت $\kappa = 0.6$ و $\kappa = 1.5$ نشان می‌دهد. قابل ذکر است که در هیچ یک از حالت‌ها، هیچ‌گونه نوسانی مشاهده نمی‌شود لذا در سیستم پلاسمای حاضر، امواج یون-صوتی ضربه‌ای یکنواختی[۱] قابلیت انتشار دارند. به عبارت دیگر، امواج ضربه بدون اختلال منتشر می‌شوند.




الف




ب

**شکل۴.** تحول زمانی موج ضربه‌ای توصیف شده توسط معادله (۳۳) در دو حالت الف) $\kappa = 0.6$ و ب) $\kappa = 1.5$. سایر پارامترها مانند شکل ۳ می‌باشند.

لازم به ذکر است که پایداری و نوسانی نبودن موج ضربه‌ای توصیف شده توسط معادله ۳۳، به صورت تحلیلی نیز قابل بررسی می‌باشد. برای این منظور، اختلال

[۱] Monotonic

کوچکی را به فرم $\phi = \phi^{(1)}(\xi,\tau) + \varepsilon\tilde{\varphi}$ برای جواب معادله K-dVB در نظر می‌گیریم. با جایگذاری این عبارت در رابطه ۲۹ و انجام محاسبات لازم، معادله دیفرانسیل زیر را برای اختلال $\tilde{\varphi}$ بدست خواهیم آورد:

$$Bm^2\frac{d^2\tilde{\phi}}{d\eta^2} - Cm\frac{d\tilde{\phi}}{d\eta} + \tilde{\phi}\left(A\phi^{(1)} - U\right) = 0 \qquad ۳۴$$

با انتخاب $\tilde{\phi} = e^{Q\eta}$ به عنوان جواب عمومی معادله ۳۴، مقدار $Q$ از طریق حل معادله کمکی درجه دوم زیر تعیین می‌شود:

$$Bm^2Q^2 - CmQ + A\phi^{(1)} - U = 0$$

از حل عبارت فوق داریم:

$$Q = \frac{C \pm \sqrt{C^2 - 4B(A\phi^{(1)} - U)}}{2Bm} \qquad ۳۵$$

شرط نوسانی بون جواب اختلالی $\tilde{\phi}$ آن است که $Q$ مختلط باشد. چنین رفتاری زمانی حاصل می‌شود که عبارت $C^2 - 4B(A\phi^{(1)} - U)$ منفی باشد. لذا با درنظر گرفتن معادله ۳۳ برای $\phi^{(1)}$ ، شرط اخیر به رابطه زیر تبدیل می‌گردد:

$$1 + 12\{1 + \tanh\eta\}^2 < 0 \qquad ۳۶$$

از آنجائیکه عبارت فوق به هیچ وجه منفی نمی‌شود بنابراین، داشتن رفتار نوسانی برای امواج ضربه‌ای در این حالت غیر ممکن بوده و پایداری آنها ثابت می‌گردد. اکنون این سوال مطرح می شود که تحت چه شرایطی امواج ضربه ای نوسانی وجود خواهند داشت؟ در ادامه پاسخ به این سوال مورد ارزیابی قرار خواهد گرفت.

## شرط وجود امواج ضربه‌ای نوسانی و یکنواخت

طبیعت ساختار موج ضربه‌ای به رابطه بین پارامترهای پاشندگی و پراکندگی در محیط پلاسمای مدنظر بستگی دارد. برای یافتن چنین ساختاری، مانند روال طی شده در بخش قبل، معادله ۲۹ را به فرم زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{d^2\phi^{(1)}}{d\eta^2} = \frac{U}{Bm^2}\phi^{(1)} - \frac{A}{2Bm^2}\left(\phi^{(1)}\right)^2 + \frac{C}{Bm}\frac{d\phi^{(1)}}{d\eta} \qquad ۳۷$$

با جایگذاری $\phi^{(1)} = \Phi_0 + \widetilde{\Phi}$ در رابطه (۳۷) و با فرض $\widetilde{\Phi} \ll \Phi_0$ خواهیم داشت:

$$\frac{d^2\widetilde{\Phi}}{d\eta^2} - \frac{C}{Bm}\frac{d\widetilde{\Phi}}{d\eta} + \frac{U}{Bm^2}\widetilde{\Phi} = 0 \qquad ۳۸$$

در اینجا $\Phi_0 = \frac{2U}{A}$ به عنوان شرط مرزی مناسب در حالت $\eta \to -\infty$ می‌باشد طوری که معادله ۲۹ بتواند یک موج ضربه‌ای را توصیف کند. اکنون با انتخاب $\exp(\mathrm{L}\eta)$ به عنوان جواب معادله ۳۸، داریم

$$\mathrm{L} = \frac{C}{2Bm} \pm \sqrt{\frac{C^2}{4B^2m^2} - \frac{U}{Bm^2}} \qquad ۳۹$$

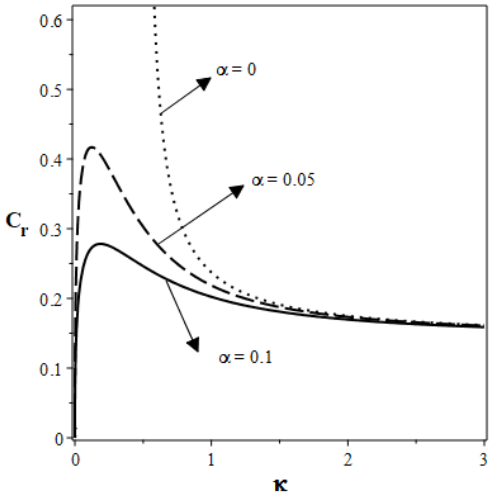
لذا برای داشتن یک موج ضربه‌ای نوسانی باید $C < C_r = \sqrt{4BU}$ باشد. به عبارت دیگر، اگر چسبندگی محیط پلاسما از یک مقدار بحرانی کمتر باشد، امواج ضربه‌ای نوسانی قابلیت انتشار را خواهند داشت. برطبق روابط ۳۸ و ۳۹، جواب موج ضربه‌ای نوسانی به صورت زیر بیان خواهد شد:

$$\phi^{(1)} = \Phi_0 + aexp(\frac{C}{2Bm}\eta)\cos\left(\sqrt{\frac{U}{Bm^2}}\eta\right)$$

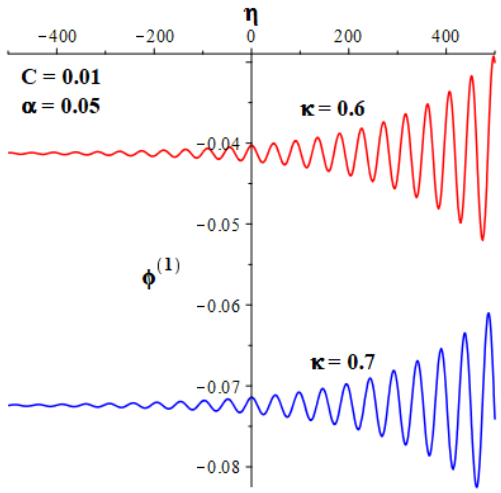
۴۰

در اینجا $a$ یک ثابت دلخواه می‌باشد. باید توجه کنیم که دلیل فیزیکی وجود چنین امواج نوسانی در محیط پلاسمای حاضر به این صورت است که اگر ضریب پراکندگی (چسبندگی) محیط پلاسما نسبتاً کوچک باشد، ذرات در یک چاه پتانسیل گیر خواهند کرد و نوسانات آنها بین دیواره چاه، یک موج نوسانی را ایجاد خواهد کرد. در این حالت، انرژی ذرات به آهستگی کم خواهد شد و این امر باعث می‌شود چند نوسان اول در جبهه موج مانند امواج سالیتونی باشند. بااین‌حال، اگر ضریب چسبندگی از مقدار بحرانی بیشتر باشد، حرکت ذرات غیرنوسانی بوده و یک موج ضربه‌ای یکنواختی بدست خواهد آمد.

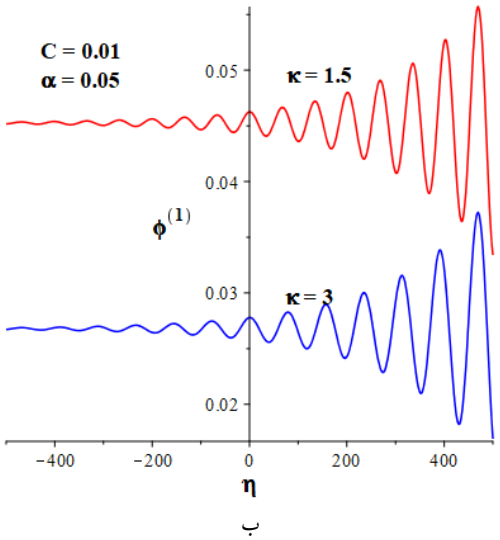
شکل ۵ تغییرات مقدار بحرانی ضریب چسبندگی $C_r$ محیط پلاسمای حاضر را در حضور الکترون‌هایی با توزیع کاپای منظم شده نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود با افزایش پارامتر قطع $\alpha$ مقدار ضریب چسبندگی بحرانی کاهش می‌یابد. از سوی دیگر، نتایج عددی نشان می‌دهند که در حضور الکترون‌هایی با توزیع کاپای منظم شده، این مقدار بحرانی با افزایش کاپا ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد. رفتار موج ضربه‌ای نوسانی برای محیط پلاسمای حاضر به ازای مقدار ثابت $\alpha = 0.05$ و مقادیر مختلف شاخص طیفی کاپا در شکل ۶ نشان داده شده است. در اینجا، با توجه به نتایج داده شده در شکل ۵، مقدار ضریب چسبندگی ۰/۰۱ انتخاب شده است تا شرط وجود امواج ضربه‌ای نوسانی به خوبی برآورده شود. مشاهده می‌شود که در حالت $\kappa < \kappa_c$، امواج ضربه‌ای نوسانی با دامنه منفی (شکل ۶ (الف)) و برای $\kappa > \kappa_c$، امواجی نوسانی با دامنه مثبت (شکل ۶ (ب)) قابلیت انتشار در این سیستم را دارند. این موضوع به خوبی با نتایج داده شده در شکل ۲(الف) سازگار می‌باشد.




**شکل۵.** تغییرات مقدار بحرانی ضریب چسبندگی $C_r$ با شاخص طیفی کاپا به ازای مقادیر مختلف $\alpha$. دراینجا $\sigma = 0.01$ و $U = 0.01$ فرض شده‌اند.




الف




ب

**شکل۶.** پروفایل موج ضربه‌ای نوسانی توصیف شده توسط معادله (۴۰) در دو حالت الف) کاپای کمتر از مقدار بحرانی و ب) کاپای بیشتر از مقدار بحرانی. سایر پارامترها به صورت $C = 0.01$، $\alpha = 0.05$ $\sigma = 0.01$ و $U = 0.01$ فرض شده‌اند.

در ادامه، برای کامل شدن بحث، تفاوت پژوهش حاضر را با سایر مقالات موجود مورد ارزیابی قرار خواهیم داد. از آنجائیکه مطالعه حاضر درخصوص بررسی ساختار موج ضربه ای در یک پلاسما در حضور الکترون هایی با توزیع کاپای منظم شده می باشد پس از دو منظر قابل ارزیابی خواهد بود که عبارتند از:

۱- تفاوت پژوهش حاضر با سایر مقالاتی که از توزیع کاپای منظم شده تبعیت می کنند چیست؟

۲- تفاوت کار حاضر با مقالات مرتبط با انتشار موج ضربه ای در پلاسماهایی با توزیع کاپای استاندارد چیست؟

در پاسخ به سوال اول نویسنده مایل است ذکر کند که – بر طبق اطلاعات نویسنده– تا کنون پژوهشی مرتبط با ساختار امواج ضربه ای در حضور الکترونهایی با توزیع کاپای منظم شده گزارش نشده است. به عبارت دیگر، تاکنون فقط شرایط وجود امواج پایدار (سالیتونی) یون–صوتی در یک پلاسما با یونهای سرد و الکترونهای دارای توزیع کاپای منظم شده به کمک روش پتانسیل سقدیف در مرجع [۲۳] بررسی شده بود. علاوه براین، معادله حاکم بر دینامیک سالیتونهای یون–صوتی نیز در یک پلاسمای سرد با الکترونهای دارای توزیع کاپای منظم شده در مرجع [۲۴] مطالعه شده است. با این حال، باید دقت کنیم که اثرات یونهای گرم و چسبندگی یونها در این مراجع لحاظ نشده و پژوهش حاضر نشان داد که در نظر گرفتن خاصیت چسبندگی می تواند اثرات متفاوتی بر روی ساختار امواج غیرخطی ایجاد نماید. همچنین، نتایج داده شده در مراجع [۲۵–۲۶] به ترتیب به بررسی ساختار امواج یون–صوتی غبارآلود و الکترون–صوتی در حضور الکترونهایی با توزیع کاپای منظم شده پرداخته اند که این امواج بطور کلی ساختار متفاوتی با امواج یون–صوتی ضربه ای دارند و این موضوع می تواند متمایز بودن پژوهش حاضر از سایر مقالات را تائید کند.

اما در پاسخ به سوال دوم باید نکات زیر را مدنظر قرار دهیم. در مقالات [۲۷–۲۹] ساختار موج ضربه ای در یک پلاسمای سه مولفه ای شامل الکترون–پوزیترون–یون بررسی شده بود. باید دقت کنیم که اولاً در این مقالات توزیع استاندارد کاپا برای الکترون ها و پوزیترونها لحاظ شده بود ثانیاً نتایج عددی نشان دادند که حضور پوزیترونها تاثیر بسزایی بر روی ویژگی های امواج یون–صوتی ضربه ای دارند. با این حال، علاوه بر سه مولفه ای بون مدل پلاسمای مد نظر، شرط مقادیر کمتر از ۱/۵ برای شاخص طیفی الکترونها و پوزیترونها در این مراجع بررسی نشده است. حال آنکه در پژوهش

حاضر، با درنظر گرفتن توزیع کاپای منظم شده رفتار موج ضربه ای به ازای تمام مقادیر کاپا مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین، باید توجه کنیم که نتایج کار حاضر با مقالات [۳۱-۳۰] نیز متفاوت می باشد. در این مقالات، ساختار موج ضربه ای یون-صوتی غبارآلود در حضور الکترونهای غیرگرمایی با توزیع استاندارد کاپا بررسی شده بود و مشاهده گردید که حضور ذرات غبارآلود سبب ایجاد رفتار متفاوتی برای امواج ضربه ای خواهند شد. این درحالی است که در پژوهش حاضر یک پلاسمای دو مولفه ای با الکترونهایی دارای توزیع کاپای منظم فرض شده است و تاثیر مولفه های مرتبط با این توزیع بر روی ساختار موج ضربه ای مورد ارزیابی قرار گرفته است.

## نتیجه گیری

در این پژوهش، خواص امواج یون-صوتی ضربه‌ای در یک پلاسما شامل یونهای گرم و الکترون‌ها غیرماکسولی(با توزیع کاپای منظم شده) بررسی شده است. با استفاده از روش اختلال کاهشی، یک معادله غیرخطی برای دینامیک امواج یون-صوتی ضربه‌ای (K-dVB) تعیین و سپس پایداری امواج در حال حرکت به صورت تحلیلی مورد بحث قرار گرفته است. با این حال، بر طبق تحلیل‌های صورت گرفته مشخص می‌شود که اگر چسبندگی محیط پلاسما از یک مقدار بحرانی کمتر باشد، امواج ضربه‌ای نوسانی قابلیت انتشار را خواهند داشت. همچنین مشاهده می‌شود که حضور الکترون‌ها با توزیع کاپای منظم شده ساختار امواج ضربه‌ای را تصحیح و سبب وجود امواج ضربه‌ای با دامنه مثبت و منفی می‌گردد. به عبارت دیگر، نشان داده شده است که پارامترهای مربوط به توزیع الکترون‌ها و ضریب چسبندگی یونها نقش مهمی در انتشار امواج یون-صوتی ضربه‌ای دارند. در پایان لازم به ذکر است که نتایج این پژوهش می تواند در درک خواص امواج ضربه ای در پلاسماهای فضایی مفید باشد جائیکه الکترونها از توزیع غیر ماکسولی کاپای منظم شده پیروی می کنند. همچنین، تاثیر میدان مغناطیسی خارجی، برخورد بین ذرات و تعیین خواص امواج در شرایطی که ضریب غیرخطی ناچیز می گردد، می تواند به عنوان موضوعاتی مطرح شود که در مطالعات بعدی قابل انجام خواهند بود.

## تشکر و قدردانی

نویسنده از داور(ان) و ویراستار محترم به خاطر نظرات ارزشمندشان که منجر به بهبود کیفیت این نسخه خطی شده است، سپاسگزار است. این کار با حمایت دانشگاه گنبد کاووس تحت عنوان یک پروژه تحقیقاتی به شماره ۲۸۱۵۵۲ مورخه ۱۴۰۳/۰۸/۰۶ انجام شده است.

## مرجع‌ها

[1] H. Ikezi, R. Taylor, D. Baker, Formation and interaction of ion-Acoustic solitions, Phys. Rev. Lett. 25 (1970) 11-14. http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.25.11

[2] R.Z. Sagdeev, in Reviews of Plasma Physics, (edited by M.A. Leontovich), Consultants Bureau, New York (1966).

[3] H. Washimi, T. Taniuti, Propagation of ion-acoustic solitary waves of small amplitude, Phys. Rev. Lett. 17 (1966) 966. http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.17.996

[4] R.C. Davidson, Methods in nonlinear plasma theory, Academic Press (1972).

[5] J. Du, Nonextensivity in nonequilibrium plasma systems with Columbian long-range interactions, Phys. Lett. A. 329 (2004) 262–267. doi: 10.1016/j.physleta.2004.07.010.

[6] V.M. Vasyliunas, A survey of low-energy electrons in the evening sector of the magnetosphere with OGO 1 and OGO 3, J. Geophys. Res. 73 (1968) 2839–2884. doi:10.1029/JA073i009p02839.

[7] R.A. Cairns, A.A. Mamum, R. Bingham, R. Boström, R. O. Dendy, C.M.C. Nairn, P.K. Shukla, Electrostatic solitary structures in non-thermal plasmas. Geophys. Res. Lett. 22 (1995) 2709.

[8] A.A. Abid, S. Ali, J. Du, A.A. Mamun, Vasyliunas–Cairns distribution function for space plasma species, Phys. Plasmas, 22 (2015) 084507. doi: 10.1063/1.4928886.

[9] M. Tribeche, R. Amour, P.K. Shukla, Ion acoustic solitary waves in a plasma with nonthermal electrons featuring Tsallis distribution, Phys. Rev. E. 85 (2012) 037401.

[10] M. Tribeche, L. Djebarni, R. Amour, Ion-acoustic solitary waves in a plasma with a q-nonextensive electron velocity distribution, Phys Plasmas. 17 (2010) 042114. DOI: 10.1063/1.3374429

[11] N.S. Saini, I. Kourakis, M.A. Hellberg, Arbitrary amplitude ion-acoustic solitary excitations in the presence of excess superthermal electrons. Phys Plasmas. 16 (2009) 062903. https://doi.org/10.1063/1.3143036

[12] S. Sultana, I. Kourakis, N.S. Saini, and M. A. Hellberg, Oblique electrostatic excitations in a magnetized plasma in the presence of excess superthermal electrons, Phys. Plasmas 17 (2010) 032310. https://doi.org/10.1063/1.3322895

[13] R.A. Cairns, A.A. Mamun, R. Bingham, P.K. Shukla, Ion-acoustic solitons in a magnetized plasma with nonthermal electrons, Phys. Scr. T63 (1996) 80.

[14] H.R. Pakzad, Ion acoustic solitary waves in plasma with nonthermal electron and positron, Phys. Lett. A 373, (2009) 847-850.

[15] K. Aoutou, M. Tribeche, T.H. Zerguini, Electrostatic solitary structures in dusty plasmas with non–thermal and superthermal electrons. *Phys. Plasmas* 15 (2008) 013702.

[16] D. Debnath, A. Bandyopadhyay, Combined effect of Kappa and Cairns distributed electrons on ion acoustic solitary structures in a collisionless magnetized dusty plasma. Astrophys. Space Sci. 365 (2020) 72.

[17] G. Nicolaou, G. Livadiotis, C.J. Owen, D. Verscharen, R.T. Wicks, Determining the Kappa distributions of space plasmas from observations in a limited energy range, Astrophys. J., 864 (2018) 1–11. doi: 10.3847/1538-4357/aad45d.

[18] F. Xiao, C. Shen, Y. Wang, H. Zheng, S. Wang, Energetic electron distributions fitted with a relativistic Kappa-type function at geosynchronous orbit, J. Geophys. Res., 113 (2008) A05203. doi: 10.1029/2007JA012903.

[19] M.R. Collier, D.C. Hamilton, The relationship between Kappa and temperature in energetic ion spectra at Jupiter, Geophys. Res. Lett., 22 (1995) 303–306. doi: 10.1029/94GL02997.

[20] P. Schippers et al., Multi-instrument analysis of electron populations in Saturn's magnetosphere, J. Geophys. Res., 113 (2008) A07208. doi: 10.1029/2008JA013098.

[21] K. Scherer, H. Fichtner, M. Lazar, Regularized k-distributions with non-diverging moments, Europhys. Lett., 120 (2017) 50002. doi: 10.1209/0295-5075/120/50002.

[22] K. Oldham, J. Myland, J. Spanier, *An* Atlas of Functions. Springer Science and Business Media, (2000).

[23] Y. Liu, Solitary ion acoustic waves in a plasma with regularized $\kappa$-distributed electrons. AIP Adv 10 (2020) 085022.

[24] F.F. Lu, S.Q. Liu, Small amplitude ion-acoustic solitons with regularized κ-distributed electrons. AIP Advances 11 (2021) 085223.

[25] N.N. Wei, and Y. Liu, Small amplitude dust ion-acoustic solitons in dusty plasma with regularized kappa distributed electron. Eur Phys J Plus 139 (2024) 362.

[26] Y. Liu, M.L. Wang, Small amplitude solitary electron acoustic wave for hot electrons taking regularized kappa distribution. Contrib Plasma Phys (2024) e202400009.

[27] A. Shah, R. Saeed, Nonlinear Korteweg–de Vries–Burger equation for ion-acoustic shock waves in the presence of kappa distributed electrons and positrons, Plasma Phys. Controlled Fusion, 53 (2011) 9.

[28] S. Hussain, S. Mahmood, Hafeez Ur-Rehman, Ion acoustic shock waves in plasmas with warm ions and kappa distributed electrons and positrons, Phys. Plasmas, 20 (2013) 062102.

[29] M. Mehdipoor, Dissipative ion-acoustic waves in collisional electron-positron-ion plasmas with Kappa distribution, Contrib. Plasma Phys. 59 (2019) 7. https://doi.org/10.1002/ctpp.201900006

[30] M.S. Alam, M.M. Masud A.A. Mamun, Effects of bi-kappa distributed electrons on dust-ion-acoustic shock waves in dusty superthermal plasmas, Chinese Phys. B 22 (2013) 115202.

[31] O. Rahman, Multi-component Dust-ion-acoustic Solitary and Shock Waves in an Unmagnetized Dusty Plasma with Kappa Distributed Superthermal Electrons, Advances in Astrophysics, 2 (2017) 2.

[32] I. Naeem, S. Ali, P.H. Sakanaka, A.M. Mirza, Formation of solitary waves and oscillatory shocklets in a two-temperature electron j–distributed plasma, Phys. Plasmas 24 (2017) 042109. http://dx.doi.org/10.1063/1.4979675

[33] D. Dutta, D. Kolay, Nonlinear behaviour of ion acoustic shock waves in a two-electron temperature nonthermal complex plasma, Z. Naturforsch. 77 (2022) 1045–1062. https://doi.org/10.1515/zna-2022-0038

[34] S.Y. EL-Monier, A.S. EL-Helbawy, M.M. Elsayed M. Saad, The role of superthermal electrons and positrons on magnetized oscillatory shock waves, Pramana J. Phys. 98 (2024) 13. https://doi.org/10.1007/s12043-023- 02705-y

[35] A.M. El-Hanbaly, E.K. El-Shewy, M. Sallah, H.F. Darweesh, Linear and nonlinear analysis of dust acoustic waves in dissipative space dusty plasmas with trapped ions, J Theor Appl Phys 9 (2015) 167–176. DOI: 10.1007/s40094-015-0175-7

[36] W. Malfliet, W. Hereman, The tanh method. I. Exact solutions of nonlinear evolution and wave equations, Phys. Scr. 54 (1966) 563–568.