Document Type: Full length research Paper
Pages: 21-42

Theory of α −Harmonic Mappings: From Differential Geometry to Physical Modeling

Seyed Mehdi Kazemi Torbaghan[1], Reza Shokoohi Ghahfarrokhi*[,2], Amir Shahnavaz[3]

[1]Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, University of Bojnord, Bojnord, Iran
[2]Department of Physics, Faculty of Basic Sciences, University of Bojnord, Bojnord, Iran
[3]Department of Mathematics, Faculty of Marine Sciences, Chabahar University of Maritime and Marine Sciences, Chabahar, Iran

Received: 11.05.2025 Final revised: 12.09.2025 Accepted: 30.11.2025 Published On-Line: 31.12.2025

Doi:10.22055/jrmbs.2025.20481

Abstract

In this paper, we introduce α-harmonic maps with potential μ on Finsler manifolds for the first time. To achieve this, we first define the α-energy functional with its energy density function. Next, we calculate the first variation formula and obtain the Euler–Lagrange equations of the α-energy functional and then subsequently define the α-tension-field tensor field using Green's theorem. We then study and analyze α-harmonic maps which are critical points of the α-energy functional. We present theorems of existence and uniqueness and several examples. In conclusion, we look at the physical applications of α-harmonic maps in environments such as general relativity, modeling elastic materials, liquid crystals, σ-models, and magnetic systems.

Keywords: α-Harmonic Mappings, Finsler Manifolds, Tension Fields, Stability

*Corresponding Author: Shokoohi@aut.ac.ir

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

مقاله پژوهشی کامل

مجلهٔ پژوهش سیستم‌های بس‌ذره‌ای، دورهٔ ۱۵، شمارهٔ ۱، بهار ۱٤۰٤ ۲۲

نظریهٔ نگاشت‌های α-هارمونیک: از هندسهٔ دیفرانسیل تا مدل‌سازی‌های فیزیکی

سید مهدی کاظمی تربقان[۱]، رضا شکوهی قهفرخی[۲,*]، امیر شهنواز[۳]

[۱] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بجنورد، بجنورد، ایران

[۲] گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بجنورد، بجنورد، ایران

[۳] گروه ریاضی، دانشکدهٔ علوم دریایی، دانشگاه دریانوردی و علوم دریایی چابهار، چابهار، ایران

دریافت: ۱٤۰٤/۰۲/۲۱ ویرایش نهائی: ۱٤۰٤/۰٦/۲۱ پذیرش: ۱٤۰٤/۰۹/۰۹ انتشار بر خط: ۱٤۰٤/۱۰/۱۰

Doi:10.22055/jrmbs.2025.20481

چکیده

در این مقاله برای نخستین بار به‌معرفی نگاشت‌های α-هارمونیک با پتانسیل μ روی منیفلدهای فینسلری می‌پردازیم. در این راستا ابتدا به‌معرفی تابع α-انرژی و چگالی تابع انرژی پرداخته سپس با محاسبهٔ فرمول تغییراتی اول، معادلهٔ اولر-لاگرانژ وابسته به تابع α-انرژی را به‌دست می‌آوریم و با استفاده از قضیهٔ گرین، میدان α-تنش را معرفی می‌نماییم. سپس نقاط بحرانی تابع α-انرژی که به آنها نگاشت‌های α-هارمونیک گویند را مورد بررسی و مطالعه قرار می‌دهیم. سپس قضایایی در زمینه وجود و پایایی این نگاشت‌ها ارائه و مثال‌هایی از این نوع نگاشت‌ها را بیان می‌کنیم. در نهایت کاربردهای فیزیکی این نگاشت‌ها در نظریه‌های مختلف فیزیک نظیر نظریهٔ نسبیت عام، مدل‌سازی مواد الاستیک، تحلیل بلورهای مایع، مدل‌های سیگما و دینامیک سیستم‌های مغناطیسی را بررسی می‌کنیم.

کلیدواژگان: نگاشت‌های α-هارمونیک، منیفلدهای فینسلری، میدان تنش، پایایی

مقدمه

ایلس[1] و سامپسون[2]، نظریهٔ نگاشت‌های هارمونیک بین منیفلدهای ریمانی را در سال ۱۹٦٤ ارائه کردند، [۳]. یک نگاشت هموار $f:(M,g)\longrightarrow(N,h)$ بین منیفلدهای ریمانی، هارمونیک[3] است هرگاه f نقطه بحرانی تابع انرژی[4]:

$$E(f)=\frac{1}{2}\int_M |df|^2 dV_g, \qquad ۱$$

بوده یا در معادله اویلر- لاگرانژ زیر صدق کند [٦]

$$\tau(f):=\mathrm{trace}_g\nabla df=0. \qquad ۲$$

در اینجا $\tau(f)$، میدان تنش نگاشت f است که توسیعی از عملگر لاپلاسین ریمانی است. قضیهٔ وجودی نگاشت‌های هارمونیک در هر کلاس هموتوپی یکی از مسائل باز در هندسهٔ فینسلری بود که ایلس و سامپسون وجود این نگاشت‌ها از یک منیفلد فشرده ریمانی به یک منیفلد با انحنای برش غیرمثبت را با به‌کارگیری

*نویسندهٔ مسئول: shokoohi@aut.ac.ir

[1] Ells
[2] Sampson
[3] Harmonic
[4] Energy Functional

باز نشر این مقاله با ذکر منبع آزاد است.

این مقاله تحت مجوز کریتیو کامنز تخصیص ٤.۰ بین‌المللی می‌باشد

تکنیک جریان گرما[1] ، اثبات نمودند [۳]. این تکنیک به فرمول بوچنر[2] متکی است که منجر به‌بررسی قضایای لیوویل[3] روی منیفلدهای ریمانی گردید، [۱۷]. با این وجود، یافتن نگاشت‌های هارمونیک بین دو منیفلد ریمانی دلخواه، به‌خصوص هنگامی که بعد منیفلد دامنهٔ بزرگ‌تر یا مساوی۲ باشد، به‌دلیل برآورده نشدن شرایط پالایس–اسمیل[4] توسط تابع انرژی، کار دشواری است، [۵]. برای رفع این مشکل، ساکس[5] و اوهلنبک[6] تابع α-انرژی[7] را به‌فرم:

$$E_\alpha(f) = \int_M (1 + |df|^2)^\alpha dV_g, \qquad ۳$$

معرفی نمودند و نگاشت‌های α-هارمونیک[8] را به‌عنوان نقاط بحرانی این تابع در نظر گرفتند، [۱۶]. این نگاشت‌ها به‌عنوان توسیعی از نگاشت‌های هارمونیک، نقشی کلیدی در مدل‌سازی مواد الاستیک، مطالعه دینامیک سیستم‌های مغناطیسی و بررسی خواص بلورهای مایع[9] دارند، [۷,۸,۱۳,۱۹,۲۳].

منیفلدهای فینسلری به‌عنوان تعمیمی از منیفلدهای ریمانی، در مدل‌سازی سیستم‌های فیزیکی پیچیده که دارای متقارن‌های هندسی سنتی نیستند، مورد توجه پژوهشگران قرار دارند، [۱۰,۱۱]. این منیفلدها در بررسی نسبیت عام و مطالعات هندسی در زمینهٔ جریان ریچی[10] به‌کار می‌روند و درک بهتری از معادلات اینشتین و سطوح مینیمال را به‌دست می‌دهند، [۱۴,۱۵]. منیفلدهای فینسلری در علم مواد، برای مدل‌سازی ساختارهای ناهمسانگرد مانند بلورها و مواد کامپوزیتی استفاده می‌شوند، [۷]. همچنین این منیفلدها به‌عنوان تعمیمی از منیفلدهای ریمانی در نظریهٔ ریسمان در مطالعهٔ جریان‌های هندسی و تحلیل انرژی در سیستم‌های فیزیکی مورد توجه قرار دارند، [۹]. نخستین بار مو[11] مفهوم نگاشت هارمونیک روی منیفلدهای فینسلری را معرفی نمود، [۱۰,۱۱]. وجود این نوع نگاشت‌ها در هر کلاس هموتوپی توسط چرن[12] در سال ۲۰۰۰ به‌عنوان یک مسئله باز در هندسه فینسلری مطرح گردید. مو و یانگ[13] در سال ۲۰۰۵ این مسئله باز را با در نظر گرفتن شرایطی روی انحنای منیفلدهای دامنه و برد حل نمودند، [۱۲]. پس از آن نگاشت‌های هارمونیک روی منیفلدهای فینسلری به‌طور گسترده مورد مطالعه و بررسی پژوهشگران قرار گرفتند، [۵,۶,۱۰,۱۱,۱۲,۱۷]. این نگاشت‌ها در حوزه‌های چندگانه فیزیک بسیار پر کاربرد هستند. به‌عنوان مثال این نگاشت‌ها در فیزیک محاسباتی برای تولید شبکه‌های ساختاریافته در هندسه‌های پیچیده به‌کار می‌روند، [۹]. در نسبیت عام نیز این نگاشت‌ها از طریق ارتباط با جریان‌های ریچی و سطوح مینیمال، به‌معادلات اینشتین پیوند می‌خورند، [۱۴,۱۵]. افزون بر این، نقش آن‌ها در نظریهٔ ریسمان و علم مواد بیانگر قابلیت تطبیق‌پذیریشان در سیستم‌های کمینه‌کننده انرژی می‌باشد، [۹]. به‌بیان دیگر نگاشت‌های هارمونیک، پلی میان هندسه دیفرانسیل و فیزیک، برای درک سیستم‌های پیچیده ارائه می‌دهند.

گپ پژوهشی در حوزهٔ نظریه نگاشت‌های هارمونیک و تعمیم‌های آن به‌عدم بررسی کاربردهای فیزیکی آنها و نقش منحصر به‌فرد آنها در نظریه‌های بنیادی فیزیک برمی‌گردد. به‌بیان دیگر بیشتر پژوهش‌ها روی نگاشت‌های هارمونیک کلاسیک به‌خواص ریاضی آن‌ها متمرکز بوده‌اند. در حالی‌که کاربرد تعمیم‌هایی از این

[1] Heat flow
[2] Bochner formula
[3] Liouville theorem
[4] Palais-Smale condition
[5] Janatan Sacks
[6] Karen Uhlenbeck
[7] α-energy functional
[8] α-harmonic maps
[9] Liquid crystals
[10] Ricci Flow
[11] Mo
[12] Chern
[13] Young

نگاشت‌ها نظیر نگاشت‌هایα-هارمونیک هنوز به‌طور جامع و ژرف در زمینه‌هایی مانند فیزیک، مهندسی مواد و سیستم‌های پیچیده بررسی نشده‌اند و کاربرد و جایگاه آن‌ها در مدل‌سازی پدیده‌های غیرخطی، انرژی‌های گرانشی و ساختارهای توپولوژیکی در مواد الاستیک، بلورهای مایع و سیستم‌های مغناطیسی مورد توجه پژوهشگران قرار نگرفته است. علاوه بر این، پایایی نگاشت‌هایα-هارمونیک روی منیفلدهای فینسلری، به‌عنوان تعمیمی از هندسهٔ ریمانی، کمتر در کانون توجه بوده‌اند. این در حالی است که این نگاشت‌ها نقشی کلیدی در نمایش سیستم‌های ناهمسانگرد و غیرخطی ایفا می‌کنند.

هدف اصلی این مقاله، بررسی کاربرد نگاشت‌های α-هارمونیک در حوزه‌های مختلف فیزیک و مهندسی می‌باشد که شامل مطالعهٔ پایایی این نگاشت‌ها در منیفلدهای فینسلری، تحلیل رفتار پایایی در سیستم‌های غیرخطی تحت تأثیر عواملی مانند تغییرات دما، فشار و میدان‌های خارجی و ارائه مدل‌های ریاضی و عددی برای اعتبارسنجی نتایج آن‌ها است. همچنین، در این مقاله تأثیر پارامتر α در تغییر خواص این نگاشت‌ها و مدل‌سازی پدیده‌های فیزیکی بررسی می‌گردد و تلاش می‌شود با استفاده از ابزارهای هندسی و فیزیکی، به توسعه تئوری‌های نو در زمینه نگاشت‌های α-هارمونیک و کاربردهای آن‌ها در حل مسائل پیچیده علمی و مهندسی پرداخته شود که به درک عمیق‌تری از خواص فیزیکی و رفتار سیستم‌های پیچیده در حوزه‌های مختلف علمی و صنعتی می‌انجامد.

این مقاله به‌شرح زیر تنظیم شده است: در بخش۲ به‌بررسی کاربردهای نگاشت‌های α-هارمونیک در فیزیک، به‌ویژه در نظریهٔ نسبیت عام، مدل‌سازی مواد الاستیک، تحلیل بلورهای مایع، مدل‌های سیگما و دینامیک سیستم‌های مغناطیسی می‌پردازیم. سپس در بخش۳، ابتدا برخی از اصول، اصطلاحات و نشانه گذاری‌های هندسه فینسلری بررسی می‌شوند و سپس مفاهیمی نظیر تابع α-انرژی، چگالی α-انرژی و نگاشت‌های α-هارمونیک روی منیفلدهای ریمانی معرفی می‌گردند. افزون بر این، با محاسبه فرمول تغییراتی اول تابع α-انرژی، معادلهٔ اویلر-لاگرانژ مرتبط با تابع α-انرژی را به‌دست آورده و در نهایت نمونه‌ای از نگاشت‌های α-هارمونیک از یک منیفلد فینسلری به منیفلد ریمانی ارائه خواهد شد. در بخش پایانی مفهوم نگاشت‌های α-هارمونیک پایا روی منیفلدهای فینسلری همراه با کاربردهای آن بررسی می‌شود و به‌علاوه شرایطی مطالعه می‌شود که تحت آن هیچ نگاشت α-هارمونیک پایای غیر ثابت از یک منیفلد فینسلری به یک کره استاندارد اقلیدسی $\mathbb{S}^n(n>3)$ وجود نداشته باشد.

کاربردهای نگاشت‌های α-هارمونیک در فیزیک و مدل‌سازی سیستم‌های پیچیده

در این بخش کاربرد نظریهٔ نگاشت‌های α-هارمونیک در فیزیک، به‌ویژه در نظریهٔ نسبیت عام، مدل‌سازی مواد الاستیک، تحلیل بلورهای مایع، مدل‌های سیگما و دینامیک سیستم‌های مغناطیسی بررسی می‌شوند. این نگاشت‌ها به‌دلیل کارایی بالا و ارتباط مستقیم با مسائل کمینه‌سازی انرژی و جریان‌های هندسی، ابزاری قوی برای تحلیل و آنالیز ساختارهای پیچیده فضا-زمان، رفتار مواد تحت تأثیر نیروها و تغییرات غیرخطی و همچنین مطالعهٔ پدیده‌های توپولوژیکی و انرژی‌های کرنشی را فراهم می‌نمایند. نگاشت‌های α-هارمونیک در نسبیت عام، برای تحلیل ساختارهای هندسی فضا-زمان، تشکیل سیاه‌چاله‌ها، امواج گرانشی و تغییرات توپولوژیکی حائز اهمیت می‌باشند. این نگاشت‌ها در مدل‌سازی مواد الاستیک و بلورهای مایع، به‌شناسایی الگوهای هندسی و تغییرات شکل‌دهی به مواد کارا بوده

و در مدل‌های سیگما، به‌عنوان اینستانتون برای توصیف اثرات غیرخطی و تونل‌زنی کوآنتومی به‌کار می‌روند. همچنین نگاشت‌های α-هارمونیک در دینامیک سیستم‌های مغناطیسی، امکان تحلیل دقیق‌تر توزیع میدان‌های مغناطیسی، گذارهای فاز و پدیده‌های غیرقابل بازگشت را فراهم می‌آورند.

الف) کاربردهای نگاشت‌های α-هارمونیک در نظریه نسبیت عام و فیزیک مدرن: تحلیل ساختارهای فضا-زمان و پدیده‌های گرانشی

در این بخش به‌بررسی کاربردهای نگاشت‌های α-هارمونیک در نظریهٔ نسبیت عام و فیزیک پرداخته و نقش آن‌ها را در تحلیل ساختارهای پیچیدهٔ فضا-زمان، مدل‌سازی پدیده‌های گرانشی و توسعهٔ تئوری‌های ریاضی مطالعه می‌نماییم. نگاشت‌های α-هارمونیک به‌دلیل ارتباط مستقیم با مسائل کمینه‌سازی انرژی و جریان‌های هندسی، ابزاری قدرتمند برای تحلیل پدیده‌هایی مانند تشکیل سیاه‌چاله‌ها، امواج گرانشی، تغییرات توپولوژیکی فضا-زمان و سایر مفاهیم بنیادی در نسبیت عام می‌باشند. این نگاشت‌ها امکان مطالعه سیستم‌های پیچیده تحت تأثیر توزیع ماده و انرژی را ممکن ساخته و دریافتی بهتر و عمیق‌تر از چگونگی شکل‌گیری ساختارهای هندسی در فضا-زمان را به‌دست می‌دهند، [۱۵]. افزون بر این، نگاشت‌های α-هارمونیک در مدل‌سازی پدیده‌های کیهانی مانند انفجارهای ستاره‌ای و تشکیل ساختارهای بزرگ‌مقیاس کیهانی نقشی کلیدی داشته و به‌فهم بهتر اصول بنیادی نسبیت عام، مانند اصل هم‌ارزی و اثرات میدان‌های گرانشی بر زمان و فضا، کمک قابل توجهی می‌کنند.

در نظریهٔ نسبیت عام انیشتین، هندسهٔ فضا-زمان همچون یک منیفلد ریمانی مدل‌سازی می‌شود و با معادلات میدان انیشتین توصیف می‌گردد. نگاشت‌های α-هارمونیک به‌دلیل پیوند مستقیم با مسائل کمینه‌سازی انرژی و جریان‌های هندسی، برای بررسی و مطالعهٔ ساختارهای هندسی پیچیده فضا-زمان کارا می‌باشند. این نگاشت‌ها به‌ویژه در آنالیز و خوانش سطوح مینیمال و جریان‌هایی مانند جریان ریچی که توصیف‌گر تغییرات هندسی فضا-زمان است، مهم و حیاتی هستند. با به‌کارگیری نگاشت‌های α-هارمونیک، می‌توان رفتار متریک فضا-زمان را تحت تأثیر توزیع ماده و انرژی بررسی نمود و به‌درک بالاتری از چگونگی پدید آمدن ساختارهای هندسی در فضا-زمان رسید. معادلات انیشتین که اساس نظریهٔ نسبیت عام را پدید می‌آورند، پیوند میان هندسه فضا-زمان (نمایش با تانسور انحنای ریمان) و توزیع ماده و انرژی (نمایش با تانسور انرژی-تکانه) را بیان می‌نمایند. نگاشت‌های α-هارمونیک برای تقریب‌زنی و حل عددی این معادلات غیرخطی به‌کار رفته و به‌ویژه در تحلیل پدیده‌های گرانشی همچون تشکیل سیاه‌چاله‌ها، امواج گرانشی و تغییرات توپولوژیکی فضا-زمان نقش و جایگاه مهمی دارند. پژوهشگران با استفاده از این نگاشت‌ها، می‌توانند رفتار سیستم‌های گرانشی را در شرایط مختلف شبیه‌سازی نموده و پیش‌بینی‌های دقیق‌تری درباره پدیده‌های فیزیکی را به‌دست آورند [۱٤].

ب) کاربرد نگاشت‌های α-هارمونیک در مدل‌سازی مواد الاستیک

نگاشت‌های α-هارمونیک ابزاری مفید در مدل‌سازی رفتار مواد الاستیک بوده که پدیده‌های غیرخطی و اثرات انرژی‌های کرنشی را دقیق‌تر توصیف می‌نمایند. این نگاشت‌ها در بررسی مواد الاستیکی که تحت تأثیر نیروهای خارجی و تغییر شکل‌های مختلف قرار گرفته‌اند می‌توانند به‌مانند مدلی برای واکاوی چگونگی توزیع تنش و کرنش در ساختار ماده عمل نمایند. نگاشت‌های α-هارمونیک به‌ویژه در شناسایی الگوهای

هندسی و توپولوژیکی ناشی از تغییرات شکل و انرژی در مواد الاستیک کاربرد دارند [۸].

یکی از کاربردهای بنیادین نگاشت‌های α-هارمونیک در مدل‌سازی مواد الاستیک، تحلیل رفتار سیستم‌های غیرخطی است که تحت تأثیر عواملی مانند تغییرات دما، فشار و میدان‌های خارجی می‌باشند. این نگاشت‌ها توانایی مدل‌سازی دقیق‌تر اثرات غیرخطی را فراهم و به‌درک بهتری از چگونگی تغییر ساختار و چیدمان ذرات در مواد الاستیک منجر می‌شوند. به‌عنوان مثال، نگاشت‌های α-هارمونیک می‌توانند الگوهای هندسی و ساختارهای توپولوژیکی را که در اثر تغییرات غیرخطی در مواد پلیمری و کامپوزیت‌ها، ایجاد می‌شوند را شناسایی کنند. این قابلیت خصوصاً در طراحی مواد هوشمند و بهینه‌سازی خواص آن‌ها در صنایع مختلف بسیار حائز اهمیت می‌باشد. به‌علاوه، این نگاشت‌ها در بررسی اثرات غیرخطی مانند تغییر شکل‌های بزرگ و پدیده‌های غیرقابل بازگشت نقشی مهم و اساسی دارند. با استفاده از نگاشت‌های α-هارمونیک، این اثرات که به‌دلیل وجود موانع انرژی در سیستم‌های فیزیکی رخ می‌دهند، قابل مدل‌سازی و پیش‌بینی خواهند شد. به‌عنوان یک نمونه، از این نگاشت‌ها در مطالعه مواد کشسان و لاستیک‌ها، برای توصیف و نمایش گذارهای بین حالات مختلف انرژی استفاده می‌شود. این نگاشت‌ها در بسط و گسترش تئوری‌های مکانیک محیط‌های پیوسته و همچنین ارائه درکی عمیق‌تر از پدیده‌های بنیادین مانند تغییر شکل‌های غیرخطی و گذار فاز در مواد الاستیک بسیار حائز اهمیت می‌باشد [۲۳].

ج) بررسی نقش نگاشت‌های α-هارمونیک در تحلیل ساختارهای هندسی و تغییرات توپولوژیکی در شبکه‌های مولکولی بلورهای مایع

در این قسمت به‌بررسی کاربرد نگاشت‌های α-هارمونیک در تحلیل ساختارهای هندسی و تغییرات توپولوژیکی در شبکه‌های مولکولی بلورهای مایع می‌پردازیم. این نگاشت‌ها با توجه به ارتباط مستقیم با مسائل کمینه‌سازی انرژی و جریان‌های هندسی، برای مطالعهٔ دقیق‌تر پیکربندی‌های مولکولی ابزاری قدرتمند می‌باشند. نگاشت‌های α-هارمونیک در بلورهای مایع، که خواص آنها تحت تأثیر توزیع ماده و انرژی قرار دارد، به‌عنوان مدلی برای تحلیل نحوهٔ تغییر شکل و چیدمان مولکول‌ها عمل نموده و به‌ویژه در شناسایی سطوح مینیمال، تحلیل الگوهای هندسی ناشی از تغییرات توپولوژیکی و مدل‌سازی رفتار مولکول‌ها تحت شرایط مختلف مانند تغییرات دما، فشار و میدان‌های خارجی بسیار پرکاربرد می باشند، [۷]. همچنین، نگاشت‌های α-هارمونیک نقش برجسته‌ای در فهم پدیده‌های فیزیکی و شیمیایی بلورهای مایع داشته و امکان مدل‌سازی دقیق‌تر رفتار مولکول‌ها در فرایندهایی مانند تشکیل نقص‌های ساختاری یا انتقال فاز را فراهم آورده و برای پیش‌بینی و تحلیل این تغییرات به‌کار می‌روند. کاربردهای گفته شده به‌ویژه در طراحی مواد نوین و بهینه‌سازی خواص آنها در صنایع مختلف، از جمله نمایشگرهای کریستال مایع و مواد هوشمند، بسیار اساسی هستند [۲].

د) بررسی کاربرد نگاشت‌هایα-هارمونیک در مدل‌های سیگما و اثرات غیرخطی

نگاشت‌های α-هارمونیک در مدل‌های سیگما برای توصیف پدیده‌های غیرخطی و اثرات غیراختلالی[1] مانند

[1] Non-Perturbative

تونل‌زنی ابزاری نیرومند و کاربردی بوده که با کمینه‌سازی انرژی دیریکله و معرفی یک پارامتر α مطالعهٔ دقیق‌تر ساختارهای توپولوژیکی و هندسی را ممکن می‌سازند. این نگاشت‌ها در مدل‌های سیگما، به‌عنوان اینستانتون‌ها عمل نموده که در واقع رفتار سیستم‌های فیزیکی را در شرایط غیرخطی توصیف می‌کنند. این اینستانتون‌ها نقش مهمی در درک پدیده‌هایی مانند تغییر فاز و تونل‌زنی کوآنتومی در سیستم‌های پیچیده دارند، [۲٤].

یکی از کاربردهای بنیادین نگاشت‌های α-هارمونیک در مدل‌های سیگما، تحلیل رفتار سیستم‌های غیرخطی تحت تأثیر تغییرات دما، فشار و میدان‌های خارجی، می‌باشد. این نگاشت‌ها امکان مدل‌سازی دقیق‌تر اثرات غیرخطی را فراهم و درک عمیق‌تری از چگونگی تغییر ساختار و چیدمان ذرات در سیستم‌های مادی را به‌دست می‌دهند. به‌عنوان مثال، نگاشت‌های α-هارمونیک می‌توانند الگوهای هندسی و ساختارهای توپولوژیکی در مواد بلوری مایع و سیستم‌های مغناطیسی که در اثر تغییرات غیرخطی ایجاد می‌شوند را شناسایی نمایند که این توانایی به‌ویژه در طراحی مواد هوشمند و بهینه‌سازی خواص آن‌ها در صنایع مختلف از اهمیت بسیار بالایی برخوردار است، [۲۱].

افزون بر موارد بالا، نگاشت‌های α-هارمونیک در تحلیل اثرات غیراختلالی مانند تونل‌زنی کوآنتومی نقشی برجسته دارند. با به‌کارگیری این نگاشت‌ها اثرات مذکور قابل مدل‌سازی و پیش‌بینی خواهند بود. برای نمونه، از نگاشت‌های α-هارمونیک در نظریهٔ میدان کوآنتومی برای نمایش گذارهای کوآنتومی بین حالات مختلف انرژی استفاده می‌شود. کاربردهای ارزشمند مذکور در گسترش تئوری‌های فیزیکی حیاتی بوده و دریافت عمیق‌تری از پدیده‌های بنیادین مانند تقارن‌شکنی و گذار فاز در سیستم‌های پیچیده را فراهم می‌آورد.

ه) کاربرد نگاشت‌های α-هارمونیک در دینامیک سیستم‌های مغناطیسی

نگاشت‌های α-هارمونیک در مدل‌سازی، تحلیل و بررسی دینامیک سیستم‌های مغناطیسی به‌عنوان ابزاری قدرتمند مطرح می‌باشند که امکان توصیف دقیق‌تر پدیده‌های غیرخطی و اثرات انرژی‌های مغناطیسی را فراهم می‌آورند. این نگاشت‌ها می‌توانند در مطالعه سیستم‌های مغناطیسی تحت تأثیر میدان‌های خارجی و تغییرات داخلی، به‌عنوان مدلی برای تحلیل نحوه توزیع میدان‌های مغناطیسی و چگالی انرژی در ساختار ماده، عمل نمایند. نگاشت‌های α-هارمونیک به‌ویژه در شناسایی الگوهای هندسی و توپولوژیکی ناشی از تغییرات مغناطیسی و انرژی در مواد مغناطیسی، کاربرد دارند، [۱۹].

یکی از کارایی‌های بنیادین و ارزشمند نگاشت‌های α-هارمونیک، در مدل‌سازی سیستم‌های مغناطیسی و تحلیل رفتار سیستم‌های غیرخطی تحت تأثیر تغییرات دما، میدان‌های مغناطیسی خارجی و تنش‌های مکانیکی، می‌باشد. این نگاشت‌ها امکان مدل‌سازی دقیق‌تر و جامع‌تر اثرات غیرخطی را فراهم نموده و درک عمیق‌تری از نحوه تغییر چیدمان دوقطبی‌های مغناطیسی و پدیده‌هایی مانند پسماند مغناطیسی را به‌دست می‌دهند. به‌عنوان مثال، نگاشت‌های α-هارمونیک می‌توانند الگوهای هندسی و ساختارهای توپولوژیکی را که در اثر تغییرات غیرخطی در مواد فرومغناطیس و اسپین‌ترونیک، ایجاد می‌شوند را شناسایی کنند که در طراحی مواد هوشمند و بهینه‌سازی خواص آن‌ها در صنایع مختلف کارا می‌باشد. نگاشت‌های α-هارمونیک همچنین در واکاوی و بررسی اثرات غیرخطی مانند گذارهای فاز مغناطیسی و پدیده‌های غیرقابل بازگشت نقشی کلیدی داشته و می‌توانند آن اثرات را مدل‌سازی و پیش‌بینی نمایند. برای نمونه، این نگاشت‌ها به‌عنوان

ابزاری مهم برای توصیف گذارهای بین حالات مختلف انرژی در مطالعه مواد فرومغناطیس و ابررساناها، استفاده می‌شوند. این کاربرد به‌درک عمیق‌تری از پدیده‌های بنیادی مانند تغییر فاز مغناطیسی و رفتار دینامیکی دوقطبی‌ها در مواد مغناطیسی منجر می‌شود، [۱۳].

بررسی منیفلدهای فینسلری و کاربرد فیزیکی آنها

در این بخش به‌بررسی کاربردهای فیزیکی، تعاریف اولیه و معرفی برخی از قضایا و نمادهای مهم درهندسه فینسلری می‌پردازیم که در ادامه این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این راستا از نمادها و تعاریف مراجع [۱۰,۱۱] بهره می‌بریم.

منیفلدهای فینسلری به‌عنوان تعمیمی از هندسه ریمانی در نظر گرفته می‌شوند که در مدل‌سازی سیستم‌های غیرخطی و ناهمسانگرد در نظریه‌های گرانش و نسبیت عام از اهمیت بالایی برخوردار هستند، [٤,۱۵,۱۸]. به‌عنوان نمونه در نظریه‌های گرانشی تعمیم‌یافته مانند گرانش انیشتن–فینسلر[1]، از منیفلدهای فینسلری برای توصیف فضا–زمان‌هایی استفاده می‌شود که خواص آن‌ها به‌جهت حرکت ذرات بستگی دارد، [٤]. این ویژگی سبب شده است که منیفلدهای فینسلری در مطالعه پدیده‌های فیزیکی نظیر تأثیرات ناهمسانگردی در کیهان‌شناسی و مدل‌سازی فضا–زمان در حضور میدان‌های قوی گرانشی ابزاری قدرتمند در نظر گرفته شوند [۱۸]. علاوه بر این، منیفلدهای فینسلری در فیزیک ماده چگال و دینامیک سیستم‌های پیچیده نیز کاربرد فراوان دارند، [۹,۱٤,۲۰]. در این راستا، پژوهشگران در بررسی مواد ناهمسانگرد نظیر بلورهای مایع یا مواد الاستیک، از هندسهٔ فینسلری برای شبیه‌سازی و مدل‌سازی رفتار انرژی و تنش‌های داخلی آن‌ها استفاده می‌نمایند، [۸,۹]. علاوه بر این در نظریه میدان‌های کوآنتومی، منیفلدهای فینسلری در بررسی رفتار سیستم‌هایی که در آن‌ها متغیرهای دینامیکی به‌صورت غیرخطی به جهت حرکت وابسته هستند، استفاده می‌شوند، [۱]. بنابراین، منیفلدهای فینسلری را می‌توان به‌عنوان پلی میان هندسهٔ دیفرانسیل و فیزیک در نظر گرفت که به‌درک عمیق‌تری از پدیده‌های فیزیکی و درک رفتار سیستم‌های پیچیده در مدل‌سازی‌های فیزیکی کمک شایانی می‌کنند.

فرض کنید M^m یک منیفلد m–بعدی باشد و $\pi: TM \longrightarrow M$ کلاف مماس آن باشد، و فرض کنید (x,y) یک نقطه از TM با ویژگی $x \in M, y \in T_xM,$ باشد.

(x^i) یک سیستم مختصات موضعی با دامنه $V \subset M$ و (x^i, y^i) سیستم مختصات موضعی استاندارد القا شده در $\pi^{-1}(V)$ با $y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ باشد. یک متریک فینسلری در M یک تابع $F: TM \longrightarrow [0,\infty)$ است، که در شرایط زیر صدق می‌کند:

•منظم بودن: $F(x,y)$ روی $TM\backslash\{0\}$ هموار است،

•همگنی مثبت: $F(x,\mu y) = \mu F(x,y)$ برای $\mu > 0$ ،

•تحدب قوی: فرم درجه دوم

$$g := g_{ij}(x,y)dx^i \otimes dx^j, \qquad ٤$$

$$g_{ij} := \frac{1}{2}[F^2]_{y^i y^j},$$

در هر نقطه $(x,y) \in TM\backslash\{0\}$ مثبت و معین است که در آن

$$[F^2]_{y^i y^j} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j}.$$

منیفلدهای موضعی مینکوفسکی و ریمانی مثال‌های شناخته شده‌ای از منیفلدهای فینسلری هستند. در ادامه، محدوده‌های اندیس‌های استفاده شده در این مقاله بیان می‌شوند :

[1] Einstein-Finsler Gravity

$1 \le A, B, C, \dots \le 2m-1,$
$1 \le a, b, c, \dots \le m-1,$
$1 \le i, j, k, \dots \le m,$
$1 \le \beta, \gamma, \delta, \dots \le n.$

دو کمیت مهم دیگر در هندسه فینسلری تانسور کارتان و فرم کارتان هستند که به‌ترتیب با A و η نشان داده می‌شوند و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$A := A_{ijk} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k, \qquad ۵$$
$$A_{ijk} := \frac{F}{4}[F^2]_{y^i y^j},$$
$$\eta := \eta_i dx^i,$$
$$\eta_i := g^{jk} A_{ijk}.$$

فرض کنید $SM := \cup_x S_x M$ کلاف کروی تصویری روی M باشد. با توجه به اینکه تحت تغییر مقیاس $y \longrightarrow ty$ برای $t > 0$ بیشتر کمیت‌های هندسی ساخته شده توسط ساختار فینسلری ثابت هستند، بنابراین در SMقابل تعریف هستند. تصویر کانونی $p: SM \longrightarrow M$ تعریف شده توسط $(x, y) \longrightarrow x$ ، کلاف مماس TM را به کلاف برداریm-بعدی p^*TM روی منیفلد $2m-1$ بعدی SM برمی‌گرداند. کلاف p^*TM و دوگان آن به‌ترتیب کلاف فینسلری و دوگان کلاف فینسلری نامیده می‌شوند. در هر نقطه$(x, y) \in SM$، هر فیبر p^*TM دارای یک پایه موضعی $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ و یک متریک g تعریف شده در رابطه٤ است. در اینجا $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ و دوگان آن $\{dx^i\}$ به‌ترتیب برش‌های $(x, y, \frac{\partial}{\partial x^i}) \in \Gamma(p^*TM)$ و $(x, y, dx^k) \in \Gamma(p^*T^*M)$ هستند. برش سرتاسری $\ell(x, y) = \frac{y^j}{F}\frac{\partial}{\partial x^j} \in \Gamma(p^*TM)$ برش تشخیصی نامیده می‌شود و فرم هیلبرت (M, F) به‌عنوان دوگان برش تشخیصی در نظر گرفته می‌شود و توسط $\Pi = [F]_{y^i} dx^i$, تعریف می‌شود که در آن $[F]_{y^i} = \frac{\partial F}{\partial y^i}$ است. علاوه بر این، هر فیبر از کلاف بردار ریمانی (p^*TM, g)دارای یک قاب سازگار $\{\Xi_j := u_j^i \frac{\partial}{\partial x^i}\}$ ، است یعنی $g(\Xi_i, \Xi_j) = \delta_{ij}$ و $\Xi_m := \ell$. دوگان قاب سازگار $\{\Xi_j\}$ با

$$\{\Pi^j := \vartheta_k^j dx^k\}$$

نشان داده می‌شود که در آن $\omega^i(\Xi_j) = \delta_j^i$. توجه شود $\Pi^m = \omega$ است. بر اساس نمادهای بالا، می‌توان نشان داد که $dx^j = u_i^j \Pi^i$ و $\frac{\partial}{\partial x^j} = \vartheta_j^i \Xi_i$ ، که در آن (ϑ_j^i) و (u_j^i)در رابطه $u_j^k \vartheta_k^i = \delta_j^i$ صدق می‌کنند. در [۱۰] می‌توان جزئیات بیشتری در ارتباط با این مفاهیم مشاهده کرد.

ضرایب التصاق غیر خطی روی TM را با $N_j^i := \frac{1}{2}\frac{\partial G^i}{\partial y^j}$ نشان می‌دهیم که در آن

$$G^i := \frac{1}{4} g^{ik}\left(\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^k \partial x^h} y^h - \frac{\partial F^2}{\partial x^k}\right)$$

است. قرار می‌دهیم:

$$\frac{\delta}{\delta x^i} := \frac{\partial}{\partial x^i} - N_i^j \frac{\partial}{\partial y^j}, \qquad ٦$$
$$\delta y^i = dy^i + N_j^i dx^j,$$
$$\Pi^{2m} = [F]_{y^j} \frac{\delta y^j}{F}.$$

مشاهده می‌شود که $\{\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\}$ پایهٔ متعامد یکه موضعی روی $T_z TM$ است و $\{dx^i, \delta y^i\}$ پایهٔ دوگان آن است. علاوه بر این

$$\{\Pi^k := \vartheta_s^k dx^s, \omega^{m+b} := \vartheta_i^b \frac{\delta y^i}{F}\}$$

پایهٔ موضعی T^*SM است. توجه داشته باشید که ω^{2m} دوگان بردار $y^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ است که روی SM صفر است. با توجه به آنچه گفته شد، زیر کلاف عمودی، زیر کلاف افقی، عنصر حجمی و متریک ساساکی روی SM را به‌ترتیب با نمادهای VSM, HSM, dV_{SM} و G ، نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۱].

$$VSM := U_{x \in M} TS_x M, \qquad ۷$$
$$HSM := \{\vartheta \in TSM, \quad \Pi^{m+a}(\vartheta) = 0\},$$
$$G := \delta_{ij} \Pi^i \omega^j + \delta_{ab} \Pi^{m+a} \otimes \Pi^{m+b},$$
$$dV_{SM} := \Pi^1 \wedge \Pi^2 \wedge \cdots \wedge \Pi^{2m-1}.$$

با توجه به‌این واقعیت که p^*TM با HSM یکسان است، لذا به HSM کلاف فینسلری گفته می‌شود. لذا ترفیع افقی متناظر با هر برش $Y \in \Gamma(p^*TM)$ را با Y^H نشان می‌دهیم [۱۰].

اتصال چرن که با∇^c ، نشان داده می‌شود یک اتصال شناخته شده روی p^*TM است که فرم اتصال آن با معادلات زیر مشخص می‌شود:

$$dg_{ij} - g_{is}\Pi^s_j - g_{js}\Pi^s_i = 2A_{ijs}\frac{\delta y^s}{F}, \quad ۸$$

و

$$d(dx^k) - dx^j \wedge \Pi^k_j = 0. \quad ۹$$

با استفاده از رابطهٔ۹ می‌توان نشان داد که دو فرم‌های انحنا اتصال چرن، $\Omega^j_i := d\Pi^j_i - \Pi^s_i \wedge \Pi^j_s$, ساختار زیر را دارند:

$$\Omega^j_i := \frac{1}{2}R^j_{ist}dx^s \wedge dx^t + P^j_{ist}dx^s \wedge \frac{\delta y^t}{F}. \quad ۱۰$$

از طرف دیگر انحنای لندزبرگ[1] روی (M,F) با L نشان داده می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{L} := \mathrm{L_{rst}dx^r \wedge dx^s \wedge dx^t}, \quad ۱۱$$

$$\mathrm{L_{rst}} := \mathrm{g_{ri}}\frac{\mathrm{y^h}}{\mathrm{F}}\mathrm{P^i_{hst}}.$$

که در آن $\mathrm{L_{rst}} = -\dot{\mathrm{A}}_{\mathrm{rst}}$ ، مشتق کوواریانت تانسور کارتان را در امتداد فرم هیلبرت نشان می‌دهد، [۱۰]. دیورژانس هر ۱–فرم $\theta = \theta_k\Pi^k \in \Gamma(p^*T^*M)$ نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$div_G\theta := trace_G D\theta, \quad ۱۲$$

که در آن D نشان دهنده اتصال لوی–چویتا روی (SM,g) است. با توجه به اینکه p^*T^*M با T^*SM یک‌ریخت است، می‌توان مشاهده کرد :

$$div_G\theta = \sum_i \theta_{i|i} + \sum_{a,b}\theta_a L_{bba} \quad ۱۳$$

$$= \sum_i (\nabla^c_{\Xi^H_i}d\theta)(\Xi_i) + \sum_{a,b}\theta_a L_{bba},$$

که در آن $\{\Xi_i\}$ یک قاب سازگار وابسته به g است، "|" نشان دهنده دیفرانسیل کوواریانس افقی نسبت به اتصال چرن است و L انحنای لندزبرگ در (M,F) است [۱۱].

نگاشت‌های α–هارمونیک با پتانسیل μ

در این بخش ابتدا به مطالعهٔ نگاشت‌های α–هارمونیک از یک منیفلد فینسلری (M^m,F) به یک منیفلد ریمانی (N^n,h) می‌پردازیم. برای این منظور تابع α–انرژی با پتانسیل μ را معرفی کرده و با استفاده از آن، مفهوم نگاشت α–هارمونیک با پتانسیل μ را به‌عنوان نقاط بحرانی این تابع انرژی معرفی می‌نماییم. لازم به‌توجه است که تابع α–انرژی با پتانسیل μ بر اساس چگالی α–انرژی با پتانسیل μ به‌صورت تابعی از مشتق نگاشت دیفرانسیل (df) و برحسب متریک h روی N تعریف می‌شود. سپس با استفاده از فرمول تغییراتی اول و عملگر دیورژانس به‌بیان مفهوم میدان α–تنش با پتانسیلμ می‌پردازیم که در آن$\mu: M \longrightarrow (0,\infty)$است. توجه شود که این میدان نقشی اساسی در تعیین شرط α–هارمونیک بودن با پتانسیل μ ایفا می‌کند. به‌بیان دیگر نگاشت f ، α–هارمونیک با پتانسیل μ است اگر و فقط اگر $\tau_\alpha(\mu,f)\equiv 0$. در نهایت، یک مثال از نگاشت‌های α–هارمونیک با پتانسیل μ از یک منیفلد مینکوفسکی موضعی به‌فضای اقلیدسی سه‌بعدی ارائه می‌کنیم. فرض کنید $f:(M,F)\to(N,h)$ نگاشتی هموار از منیفلد فینسلری (M,F) به منیفلد ریمانی (N,h)باشد. همچنین فرض کنید $\mu: M\to(0,\infty)$ یک تابع هموار و مثبت باشد. تابع $e_\alpha(\mu,f): SM \longrightarrow \mathbb{R}$ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e_\alpha(\mu,f)(x,y) = \quad ۱٤$$
$$\mu(f(x))(1+Tr_g(h(df,df)))^\alpha,$$

را چگالی α–انرژی با پتانسیل μ می‌نامند. به‌طور موضعی در مختصات $(x,y)\in SM$ ، چگالی α–انرژی با پتانسیل μ به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$e_\alpha(\mu,f)(x,y) = \quad ۱۵$$
$$\mu(f(x))g^{ij}f_i^\gamma f_j^\beta(1+h_{\gamma\beta}(\tilde{x}))^\alpha,$$

که در آن $df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = f_i^\alpha\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^\alpha}$ و $\tilde{x}=f(x)$ است. تابع α–انرژی با پتانسل μ ، نگاشت f نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_\alpha(\mu,f) = \frac{1}{c_{m-1}}\int_{SM} e_\alpha(\mu,f)dV_{SM}, \quad ۱۶$$

[1] Landsberg

که در آن $c_{m-1} = Vol(S^{m-1})$ حجم کره استاندارد $(m-1)$ بعدی و dV_{SM} فرم حجمی کانونی روی SM می‌باشد.

فرض کنید (M^m, F) یک منیفلد فینسلری و (N^n, h) یک منیفلد ریمانی باشد. اگر نگاشت هموار $f:(M,F)\longrightarrow(N,h)$ یک نقطهٔ بحرانی از تابع α-انرژی با پتانسیل μ باشد، آنگاه f را یک نگاشت α-هارمونیک با پتانسیل μ می‌نامند.

فرض کنید $\{f_t: M\longrightarrow N\}$ یک تغییرات هموار از f باشد به‌طوری که $f_0 = f$ و میدان برداری تغییراتی آن به فرم زیر باشد:

$$\upsilon = \frac{\partial f_t}{\partial t}|_{t=0} = \upsilon^{\beta}\frac{\partial}{\partial y^{\beta}}\circ f. \qquad ۱۷$$

با توجه به رابطهٔ۱۵، چگالی α-انرژی با پتانسیل μ نگاشت f_t ، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$e_{\alpha}(\mu, f_t)(x,y) = \qquad ۱۸$$
$$\mu(f(x))(1+\delta^{ij}h_{\beta\gamma}(\bar{x})f^{\beta}_{t|i}f^{\gamma}_{t|j})^{\alpha},$$

که در آن $\bar{x} = f_t(x)$ و

$$df_t(\Xi_i) = u^j_i\frac{\partial f^{\beta}_t}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^{\beta}}\circ f_t := f^{\beta}_{t|i}\frac{\partial}{\partial y^{\beta}}\circ f.$$

حال با استفاده از رابطهٔ۱۸, داریم :

$$\frac{\partial}{\partial t}e_{\alpha}(\mu, f_t)|_{t=0} = \qquad ۱۹$$
$$\mu(f(x))(1+|df|^2)^{\alpha-1}trace_g h(\nabla_{\upsilon}df).$$

قرار می‌دهیم :

$$\Theta := \mu(f(x))h(\upsilon,(1+|df|^2)^{\alpha-1}df(\Xi_i))\Pi^i. \qquad ۲۰$$

با در نظر گرفتن رابطهٔ۱۳، نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned}div_G\Theta = {} & \mu(f(x))h(\upsilon,(1\\ & +|df|^2)^{\alpha-1}trace_g\nabla df\\ & +\mu(f(x))df\circ p(grad^H(1\\ & +|df|^2)^{\alpha-1})\\ & -\mu(f(x))(1\\ & +|df|^2)^{\alpha-1}df\circ p(M^H\\ & +\mu(f(x))\sum_j h(\nabla_{\Xi^H_j}\upsilon,(1\\ & +|df|^2)^{\alpha-1}df\Xi_j))\\ & +g^{ij}\upsilon^{\beta}\frac{\delta\mu(f(x))}{\delta x^j}h_{\alpha\beta}f^{\alpha}_i, \end{aligned} \qquad ۲۱$$

که در آن M به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$M := \sum_{a,b}\dot{A}_{bba}e_a. \qquad ۲۲$$

با استفاده از قضیه گرین و روابط۱۹ و ۲۱ داریم

$$\frac{d}{dt}E_{(\alpha}(\mu, f_t)|_{t=0} = -\frac{1}{c_{m-1}}\int_{SM} h(\tau_{\alpha}(\mu,f),\upsilon)dV_{SM}, \qquad ۲۳$$

که در آن

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha}(\mu,f) = {} & (\mu\circ f)(1+|df|^2)^{\alpha-1}trace_g\nabla df\\ & +(\mu\circ f)df\circ p(grad^H(1+|df|^2)^{\alpha-1})\\ & -(1+|df|^2)^{\alpha-1}df\circ p(M^H)\\ & -e_{\alpha}(\mu,f)(grad_h\mu)\circ f, \end{aligned} \qquad ۲۴$$

که در آن M در رابطهٔ۲۲ تعریف شده است و

$$grad^H(1+|df|^2)^{\alpha-1}$$

قسمت افقی

$$grad(1+|df|^2)^{\alpha-1}\in\Gamma(TSM)$$

را نشان می‌دهد و $p: SM\longrightarrow M$ تصویر کانونی روی SM است. برش $\tau_{\alpha}(\mu,f)$ ، را میدان α-تنش با پتانسیل μ نگاشت f نامیده می‌شود. با ۲۳ و ۲۴ نتیجه زیر به‌دست می‌آید.

قضیه. هر نگاشت هموار $f:(M,F)\longrightarrow(N,h)$ α-هارمونیک با پتانسیل μ است اگر و فقط اگر $\tau_{\alpha}(\mu,f)\equiv 0$.

مثال فرض کنید

$$\mu(x^1,x^2,x^3) = x^2+2x^1-3x^3, \qquad ۲۵$$

یک تابع هموار روی $\mathbb{R}^3$ باشد و

$$f:(\mathbb{R}^2,F)\longrightarrow(\mathbb{R}^3,\langle,\rangle)$$

یک نگاشت هموار از یک منیفلد موضعاً مینکوفسکی $(\mathbb{R}^2,F)$ به فضای سه بعدی اقلیدسی $(\mathbb{R}^3,\langle,\rangle)$ باشد که توسط رابطهٔ زیر تعریف شده است

$$f(x) = (3x^1-5x^2, -x^1+6x^2, 6x^1-7x^2). \qquad ۲۶$$

در این صورت با استفاده از روابط ۲۳ و ۲۴ و با توجه به‌اینکه انحنای لندزبرگ منیفلدهای به‌صورت موضعی مینکوفسکی صفر است، می‌توان دید که f یک نگاشت α-هارمونیک با پتانسیل μ است.

پایایی نگاشت‌های α-هارمونیک با پتانسیل μ

در این بخش به‌بررسی پایایی نگاشت‌های α-هارمونیک با پتانسیل μ از یک منیفلد فینسلری به یک منیفلد ریمانی می‌پردازیم. در این راستا با استفاده از قضیه گرین و با استفاده از تغییرات هموار دو پارامتری $\{f_{ts}\}$از $f_{0,0} = f$ ، فرمول تغییراتی مرتبهٔ دوم تابع α-انرژی با پتانسیل μ را محاسبه می‌کنیم. سپس مفهوم نگاشت‌های α-هارمونیک پایا را معرفی کرده و کاربردهای آن را بررسی می‌کنیم. در نهایت شرایطی که باعث می‌شوند نگاشت‌های α-هارمونیک با پتانسیل μ از یک منیفلد فشرده فینسلری به یک کره استاندارد اقلیدسی پایا نباشند، ارائه می‌شود.

نگاشت‌های پایای α-هارمونیک نقشی کلیدی در فیزیک به‌ویژه در مطالعه سیستم‌های تعادلی، دارند. این نگاشت‌ها با تعریف تابع انرژی به‌صورت ترکیبی از جملات گرادیانی (مانند$\int (1 + |d\phi|^2)^{\alpha}$) و پتانسیلی شبیه‌سازی و مدل‌سازی رفتارها و سیستم‌های پیچیده فیزیکی که در آنها پایداری یا ناپایداری میدان‌ها تحت تأثیر انرژی‌ها و نیروهای مختلف قرار دارد را ممکن می سازند. برای نمونه پایایی این نگاشت‌ها در مدل‌های ابررسانایی مانند مدل گینزبورگ -لاندا[1]، کمک شایانی به‌تحلیل پیکربندی‌های پایدار میدان‌های مرتبه‌ای نموده که در این مدل‌ها، جملهٔ پتانسیل، نقش تغییر فاز[2] و جمله گرادیانی، انرژی مرتبط با گذار فاز[3] را تعیین می‌کند. افزون بر این پایایی نگاشت‌های α-هارمونیک نقشی کلیدی در مطالعه ساختارهای توپولوژیکی مانند دیون‌ها[4] ، مونوپول‌ها[5] یا ریسمان‌های کیهانی ایفا می‌کند. این نگاشت‌ها به شناسایی پیکربندی‌های پایدار توپولوژیکی که تحت تأثیر پتانسیل‌های خارجی یا تعاملات داخلی سیستم قرار دارند، کمک می‌نمایند.

به‌بیان دیگر، پتانسیل‌ها نقشی تعیین کننده در رفتار میدان‌ها در نزدیکی نقاط بحرانی یا در حالت‌های حدی دارند. ویژگی‌های مذکور در توصیف پدیده‌هایی مانند تشکیل ناهمسانگردی‌ها یا تغییرات توپولوژیکی در مواد کوآنتومی کاربردهای فراوانی دارند. قضایای ریاضی نظیر قضیه لیوویل[6] شرایط وجود یا عدم وجود جواب‌های نابدیهی برای این نگاشت‌ها را تعیین نموده که در درک پایداری سیستم‌های فیزیکی ارزش کلیدی دارند. این قضایا به پژوهشگران حوزهٔ ریاضی و فیزیک کمک کرده تا شرایط دقیقی که در آن‌ها سیستم‌ها به‌حالت پایدار و یا حالت ناپایدار گذار می‌کنند را شناسایی کنند. از این رو، نگاشت‌های α-هارمونیک در تحلیل سیستم‌های غیرخطی و سیستم‌های دینامیکی که شامل تعاملات پیچیده هستند، بسیار مفید و کارا هستند. در نهایت، کاربردهای عملی این نگاشت‌ها در زمینه‌های مختلف فیزیک نظری و فیزیک محاسباتی را به‌طور آشکار می‌توان دید. برای نمونه‌ای از این کاربردها می‌توان به مدل‌سازی ساختارهای کریستالی مایع، توصیف پدیده‌های ابررسانایی و بررسی دینامیک جابه‌جایی نقص‌ها اشاره نمود. این نگاشت‌ها به‌دلیل توانایی در تحلیل و آنالیز انرژی سیستم‌ها به‌صورت ترکیبی از جملات گرادیانی و پتانسیلی، ابزاری نیرومند برای توصیف رفتارهای فیزیکی در مقیاس‌های میکروسکوپی و ماکروسکوپی بوده و بنابراین پایایی آنها نه تنها در توسعه نظری فیزیک بلکه در کاربردهای عملی آن بسیار کارا و ارزشمند می‌باشد.

در ادامه به بررسی پایایی نگاشت‌های α-هارمونیک با پتانسیل μ می‌پردازیم. برای این منظور برای یک تغییرات هموار دو پارامتری $f_{t,s}$ از $f_{0,0} = f$ ، قرار می‌دهیم:

[1] Ginzburg-Landau Model
[2] Phase Transition
[3] Phase Transition Energy
[4] Dyons
[5] Monopoles
[6] Liouville's Theorem

$$\upsilon := \frac{\partial f_{t,s}}{\partial t}|_{t=s=0}, \qquad \vartheta := \frac{\partial f_{t,s}}{\partial s}$$
$$\mathcal{D}_\alpha(\mu, f) := 2\alpha\, \mu \circ f(1+|df|^2)^{\alpha-1},$$
$$\mathcal{E}_\alpha(\mu, f) := 4\alpha(\alpha-1)\, \mu \circ f(1+|df|^2)^{\alpha-2}. \quad ۲۷$$

حال در قضیه زیر به‌بررسی فرمول تغییراتی دوم برای نگاشت‌های α-هارمونیک با پتانسیل μ می‌پردازیم.

برای محاسبه فرمول تغییراتی دوم، قضیه زیر را مطرح و اثبات می کنیم. فرض کنید $f: (M, F) \longrightarrow (N, h)$ یک نگاشت α-هارمونیک با پتانسیل μ و $\{f_{t,s}: M \longrightarrow N\}_{-\xi<s,t<\xi}$ یک تغییر هموار دو پارامتری از f باشد به‌طوری که $f_{0,0} = f$ است. در این صورت:

$$I_{\alpha,(\mu,f)}(\upsilon, \vartheta) = \frac{\partial^2}{\partial t\, \partial s} E_{(\alpha,\mu)}(f)|_{t=s=0}$$
$$= -\frac{1}{c_{m-1}} \int_{SM} \{2\mathcal{D}_\alpha(\mu, f)\langle \nabla\upsilon, df\rangle \mathrm{grad}_h \mu$$
$$-\mathcal{D}_\alpha(\mu, f)\nabla_{\mathrm{grad}_\mu^H}\upsilon$$
$$+\mu \circ f\mathcal{E}_\alpha(\mu, f)\langle \nabla\upsilon, df\rangle\langle \nabla\upsilon, df\rangle$$
$$-\mu \circ fh(\nabla_{\mathrm{grad}^H \mathcal{D}_\alpha(\mu,f)}\upsilon$$
$$+\mu \circ f\mathcal{D}_\alpha(\mu, f)$$
$$\mathrm{trace}_g R^N(\upsilon, df)df, \vartheta)\}dV_{SM}, \quad ۲۸$$

که در آن M در ۲۲ و نمادهای υ ، ϑ ، $\mathcal{D}_\alpha(\mu, f)$ و $\mathcal{E}_\alpha(\mu, f)$ در رابطهٔ۲۷ تعریف شده‌اند. همچنین R^N تانسور انحنای روی (N, h) است و ⟨,⟩ حاصلضرب داخلی روی $T^*M \otimes f^{-1}TN$ را نشان می‌دهد.

برای اثبات قضیه فوق فرض کنید $\bar{M} = (-\varepsilon, \varepsilon) \times M$ منیفلد حاصل‌ضربی باشد، $\bar{p}: S\bar{M} \longrightarrow \bar{M}$ تصویر طبیعی روی کلاف کروی $S\bar{M}$ باشد و تابع $\bar{f}: \bar{M} \longrightarrow N$ با ضابطهٔ $\bar{f}(t, s, x) := f_{t,s}(x)$ تعریف شود. قرار می‌دهیم:

$$\Theta := \mu(f(x))\mathcal{D}_\alpha(\mu, f_{t,s})$$
$$\times h\left(\nabla_{\Xi_i^H} df_{t,s}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), df_{t,s}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\right)\Pi^i, \quad ۲۹$$

و

$$\widehat{\Theta} := \mu(f(x))h(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} df_{t,s}(\frac{\partial}{\partial t}), \mathcal{D}_\alpha(\mu, f_{t,s})$$
$$\times df_{t,s}(e_i))\Pi^i. \quad ۳۰$$

با توجه به‌اینکه

$$\frac{\partial \mathcal{D}_\alpha(\mu, f_{t,s})}{\partial s}|_{t=s=0} = \mathcal{E}_\alpha(\mu, f)$$
$$\times h\left(\nabla_{\Xi_i}\vartheta, df(\Xi_i)\right), \quad ۳۱$$

و همچنین با استفاده از رابطهٔ۱۳، دیورژانس ۱-فرمی‌ها Θ و $\widehat{\Theta}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\mathrm{div}_G(\Theta) = \mu(f(x))\sum_i \{\Xi_i^H(\mathcal{D}_\alpha(\mu, f_{t,s}))$$
$$\times h(\nabla_{\Xi_i^H} df_{t,s}(\frac{\partial}{\partial t}), df_{t,s}(\frac{\partial}{\partial s}))$$
$$+\mathcal{E}_\alpha(\mu, f_{t,s})h(\nabla_{e_i^H}\nabla_{\Xi_i^H} df_{t,s}(\frac{\partial}{\partial t}), df_{t,s}(\frac{\partial}{\partial s}))$$
$$+\mathcal{D}_\alpha(\mu, f_{t,s})$$
$$\times h(\nabla_{\Xi_i^H} df_{t,s}(\frac{\partial}{\partial t}), \nabla_{\Xi_i^H} df_{t,s}(\frac{\partial}{\partial s}))\}, \quad ۳۲$$

و

$$\mathrm{div}_G(\widehat{\Theta}) = \mu(f(x))\sum_i (h(\nabla_{\Xi_i^H}\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} df_{t,s}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$$
$$, \mathcal{D}_\alpha(\mu, f_{t,s})df_{t,s}(\Xi_i)) + h(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} df_{t,s}(\frac{\partial}{\partial t})$$
$$, \nabla_{\Xi_i^H}(\mathcal{D}_\alpha(\mu, f_{t,s})df_{t,s}(\Xi_i)))). \quad ۳۳$$

با استفاده از روابط ۳۲ و ۳۳ و همچنین به‌کارگیری قضیه گرین داریم:

$$\mu(f(x))\frac{\partial \mathcal{D}_\alpha(\mu, f_{t,s})}{\partial s}$$
$$\times h(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} df_{t,s}(\Xi_i), df_{t,s}(\Xi_i))||_{t=s=0} =$$
$$\mu(f(x))\mathcal{E}_\alpha(\mu, f)\langle \nabla\vartheta, df\rangle\langle \nabla\upsilon, df\rangle. \quad ۳۴$$

همچنین

$$\int_{SM} \mu(f(x))\mathcal{D}_\alpha(\mu, f_{t,s})$$
$$\times h\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} df_{t,s}(\Xi_i), \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} df_{t,s}(\Xi_i)\right)|_{t=s=0} dV_{SM}$$
$$= -\int_{SM} +\mu(f(x))\mathcal{E}_\alpha(\mu, f)trace_g\nabla^2\vartheta -$$
$$\mu(f(x))\mathcal{D}_\alpha(\mu, f)\nabla_{M^H}\vartheta, \upsilon)\}dV_{SM}. \quad ۳۵$$

از روابط ۳۴ و ۳۵ نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial^2}{\partial t\partial s} E_\alpha(\mu, f_{t,s})|_{t=s=0} = \int_{SM} \frac{\partial^2 e_\alpha(\mu, f_{t,s})}{\partial t\partial s}$$
$$= \frac{1}{c_{m-1}} \int_{SM} \{\mu(f(x))(\frac{\partial \mathcal{D}_\alpha(\mu, f_{t,s})}{\partial s})$$
$$\times h\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} df_{t,s}(\Xi_i), df_{t,s}(\Xi_i)\right)$$
$$+\mu(f(x))\mathcal{D}_\alpha(\mu, f_{t,s})$$
$$\times (h(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} df_{t,s}(\Xi_i), \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} df_{t,s}(e_i))$$
$$+\mu(f(x))h\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} df_{t,s}(\Xi_i), df_{t,s}(\Xi_i)\right)$$
$$+\frac{\partial^2 \mu}{\partial t\partial s}(1+|df_{ts}|^2)^\alpha)\}dV_{SM}$$

$$= -\frac{1}{c_{m-1}}\int_{SM}\{2\langle\nabla v, df\rangle grad_h - \nabla_{grad_\mu^H} v$$
$$+\mu\circ f\mathcal{E}_\alpha(\mu, f_{t,s})\langle\nabla v, df\rangle\langle\nabla v, df\rangle$$
$$-\mu\circ fh(\nabla_{grad^H\mathcal{D}_\alpha(\mu,f)}\, v$$
$$-\mu\circ f\mathcal{D}_\alpha(\mu,f)\nabla_{M^H} v$$
$$+\mu\circ f\mathcal{D}_\alpha(\mu,f)\ trace_g\nabla^2 v$$
$$+\mu\circ f\mathcal{D}_\alpha(\mu,f)$$
$$\times\ trace_g R^N(v, df)df, \vartheta)\}dV_{SM}, \qquad ۳۶$$

و بدین ترتیب اثبات کامل می‌شود.

قرار می‌دهیم

$$I_{\alpha,(\mu,f)}(v,v) := -\frac{1}{c_{m-1}}\int_{SM}\{2\langle\nabla v, df\rangle grad_h\mu$$
$$-\nabla_{grad_\mu^H} v$$
$$+\mu\circ f\mathcal{E}_\alpha(\mu,f)\langle\nabla v, df\rangle\langle\nabla v, df\rangle$$
$$-\mu\circ fh(\nabla_{grad^H\mathcal{D}_\alpha(\mu,f)}\, v$$
$$-\mu\circ f\mathcal{D}_\alpha(\mu,f)\nabla_{M^H} v$$
$$+\mu\circ f\mathcal{D}_\alpha(\mu,f)\ trace_g\nabla^2 v$$
$$+\mu\circ f\mathcal{D}_\alpha(\mu,f)\ trace_g R^N(v, df)$$
$$\times\ df, \vartheta)\}dV_{SM}. \qquad ۳۷$$

تعریف. هرگاه $f:(M,F)\to(N,h)$ نگاشت α-هارمونیک با پتانسیل μ باشد. در این‌صورت f را پایدار نامند، هرگاه $I_{\alpha,(\mu,f)}(v,v)$ برای هر میدان برداری تغییراتی v در طول f بزرگتر از صفر باشد .

با توجه به تعریف بالا، اگر حداقل یک میدان برداری تغییراتی ν در طولf موجود باشد که

$I_{\alpha,(\mu,f)}(\nu,\nu) < 0$

باشد در اینصورت نگاشت f ناپایاست.

پایایی نگاشت‌هایα-هارمونیک با پتانسیل μ از یک منیفلد فینسلری به کره‌های اقلیدسی

در این بخش، به‌بررسی پایایی نگاشت‌های α-هارمونیک از یک منیفلد فینسلری به یک کره واحد استاندارد اقلیدسی با استفاده از روش متوسط تغییرات [10, 11] می‌پردازیم.

کره استاندارد واحد $\mathbb{S}^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$ را در نظر بگیرید. نمادهای ∇^R و ∇^S را به‌ترتیب برای نشان دادن اتصال‌های لوی-چویتا روی $\mathbb{R}^{n+1}$ و $\mathbb{S}^n$ در نظر می‌گیریم. در هر نقطه $p\in\mathbb{S}^n$ ، هر بردار $v\in\mathbb{R}^{n+1}$ رامی‌توان به‌صورت منحصر به‌فرد به‌شکل زیر نوشت

$$v = v^\top + v^\perp \qquad ۳۸$$

که در آن $v^\top$ و $v^\perp=\langle v,p\rangle p$ به‌ترتیب نشان دهنده مؤلفه‌های مماسی و نرمال v بر $\mathbb{S}^n$ هستند. در ادامه این بخش از نمادهای B و A^X به‌ترتیب برای نشان دادن دومین فرم اساسی از $\mathbb{S}^n$ در $\mathbb{R}^{n+1}$ و عملگر شکلی $\mathbb{S}^n$ مربوط به یک میدان برداری نرمال X استفاده می‌شود. لازم به‌توجه است که عملگر شکلی و دومین فرم اساسی $\mathbb{S}^n$ در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$\langle B(v,\omega), X\rangle = \langle A^X(v),\omega\rangle$$
$$= -\langle v,\omega\rangle\langle p, X\rangle. \qquad ۳۹$$

با توجه به نمادهای بالا ، پایایی نگاشت‌های α-هارمونیک با پتانسیل μ را در قضیهٔ ذیل بررسی می‌کنیم .

قضیه فرض کنید $f:(M,F)\to\mathbb{S}^n$ یک نگاشت α-هارمونیک با پتانسیل μ از یک منیفلد فینسلری فشرده (M,F)به کره استاندارد $\mathbb{S}^n$ باشد به‌طوری‌که $|df|^2 < \frac{n-2}{2\alpha-n}$و . $\mathrm{grad}|\mu\circ f|^2>0$ در این صورت f پایا نیست.

اثبات: نقطهٔ دلخواه $(x,y)\in SM$ را انتخاب کنید. قرار می‌دهیم $\hat{x}=\hat{f}(x,y)$ که در آن $\hat{f}=f\circ p$ و $p: SM\to M$ تصویر کانونی روی SM است. فرض کنید $\{\Theta_\beta\}_{\beta=1}^{n+1}$پایهٔ متعامد ثابت در $\mathbb{R}^{n+1}$ باشد، R^S نشان دهنده تانسور انحنای $\mathbb{S}^n$ است و $\{\Xi_i\}_{i=1}^m$ یک میدان قاب سازگار روی M باشد. با توجه به‌اینکه انحنای برشی $\mathbb{S}^{n+1}$ ثابت است، داریم:

$$\sum_{\beta=1}^{n+1}\sum_{i=1}^m\langle R^S\left(\Theta_\beta^\top, df(\Xi_i)\right)df(\Xi_i),\Theta_\beta^\top\rangle = (n-1)|df|^2. \qquad ٤۰$$

با استفاده از رابطهٔ۳۸ می‌توان نشان داد:

$$\mu\circ f\nabla_{\mathrm{grad}^H\mathcal{D}_\alpha(\mu,f)}\Theta_\beta^\top = A^{\Theta_\beta^\perp}(d\hat{f}(\mathrm{grad}^H\mathcal{D}_\alpha(\mu,f))), \qquad ٤۱$$

و

$$\nabla_v\Theta_\beta^\top = \nabla^S_{d\hat{f}(v)}\Theta_\beta^\top = A^{\Theta_\beta^\perp}\left(d\hat{f}(v)\right). \qquad ٤۲$$

از رابطهٔ ۴۲، نتیجه می‌شود:

$$\langle \nabla_{\upsilon}\Theta_{\beta}^{\top}, \mathrm{d}\hat{\mathrm{f}}(\upsilon)\rangle = -|\mathrm{d}\hat{\mathrm{f}}(\upsilon)|^2\langle \hat{\mathrm{x}}, \Theta_{\beta}\rangle. \qquad ۴۳$$

لذا داریم

$$\mathcal{E}_{\alpha}(\mu,\mathrm{f})\sum_{\beta=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\langle \nabla_{\Xi_i}\Theta_{\beta}^{\top}, \mathrm{d}\hat{\mathrm{f}}(\Xi_i^{\mathrm{H}})\rangle^2 = \mathcal{E}_{\alpha}(\mu,\mathrm{f})|\mathrm{df}|^4. \qquad ۴۴$$

برای هر $\mathrm{p}\in\mathbb{S}^n$ ، تابع $\Upsilon_{\beta}:\mathbb{S}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ با ضابطهٔ ذیل را در نظر می‌گیریم

$$\Upsilon_{\beta}(\mathrm{p}) := \langle \Theta_{\beta}, \mathrm{p}\rangle.$$

در این صورت برای هر میدان برداری υ روی $\mathbb{S}^n$ داریم:

$$\mathrm{A}^{\Theta_{\beta}^{\perp}}(\upsilon) = -\upsilon\Upsilon_{\beta}. \qquad ۴۵$$

با استفاده از روابط ۳۹،۴۱ و ۴۵ نتیجه می‌شود:

$$-\sum_{\beta}\langle \nabla_{\mathrm{grad}^{\mathrm{H}}\mathcal{D}_{\alpha}(\mu,\mathrm{f})}\Theta_{\beta}^{\top}, \Theta_{\beta}^{\top}\rangle = \sum_{\beta}\Upsilon_{\beta}\circ\mathrm{f}\langle \mathrm{d}\hat{\mathrm{f}}(\mathrm{grad}^{\mathrm{H}}\mathcal{D}_{\alpha}(\mu,\mathrm{f}), \Theta_{\beta}^{\top}\rangle, \qquad ۴۶$$

و

$$-\sum_{\beta}\mathcal{D}_{\alpha}(\mu,\mathrm{f})\langle \nabla_{\mathrm{Q}^{\mathrm{H}}}\Theta_{\beta}^{\top}, \Theta_{\beta}^{\top}\rangle = \sum_{\beta}\Upsilon_{\beta}\circ\hat{\mathrm{f}}\langle \mathrm{d}\hat{\mathrm{f}}(\mathrm{Q}^{\mathrm{H}}), \Theta_{\beta}^{\top}\rangle. \qquad ۴۷$$

با به‌کار بردن ۴۱ و ۴۵ و در نظر گرفتن رابطهٔ ذیل

$$\nabla_{\Xi_i^{\mathrm{H}}}\Theta_{\beta}^{\top} = \mathrm{A}^{\Theta_{\beta}^{\perp}}(\mathrm{d}\hat{\mathrm{f}}(\Xi_i^{\mathrm{H}})) \qquad ۴۸$$

می‌توان مشاهده کرد که

$$\sum_i \nabla_{\Xi_i^{\mathrm{H}}}\nabla_{\Xi_i^{\mathrm{H}}}\Theta_{\beta}^{\top} = \sum_i \nabla_{\Xi_i^{\mathrm{H}}}^{\mathrm{H}}\mathrm{A}^{\Theta_{\beta}^{\perp}}(\mathrm{d}\hat{\mathrm{f}}(\Xi_i^{\mathrm{H}})) = -\sum_i\langle \mathrm{d}\hat{\mathrm{f}}(\Xi_i^{\mathrm{H}}), \Theta_{\beta}^{\top}\circ\hat{\mathrm{f}}\rangle\mathrm{d}\hat{\mathrm{f}}(\Xi_i^{\mathrm{H}}) - \Upsilon_{\beta}\circ\hat{\mathrm{f}}\sum_i \nabla_{\Xi_i^{\mathrm{H}}}\mathrm{df}(\Xi_i), \qquad ۴۹$$

که در آن برای آخرین تساوی از $\mathrm{grad}\,\Upsilon_{\beta} = \Theta_{\beta}^{\top}$ ، استفاده شده است. بنابر رابطهٔ ۴۹ داریم:

$$\sum_{\beta}\mathcal{D}_{\alpha}(\mu,\mathrm{f})\langle \mathrm{trace}_{\mathrm{g}}(\nabla^2\Theta_{\beta}^{\top}), \Theta_{\beta}^{\top}\rangle = -\mathcal{D}_{\alpha}(\mu,\mathrm{f})|\mathrm{df}|^2 - \sum_{\beta}\Upsilon_{\beta}\circ\hat{\mathrm{f}}\langle \mathcal{D}_{\alpha}(\mu,\mathrm{f})\mathrm{trace}_{\mathrm{g}}\nabla\mathrm{df}, \Theta_{\beta}^{\top}\rangle. \qquad ۵۰$$

با جایگزینی ۴۴–۴۰ در ۳۶، داریم:

$$\sum_{\beta=1}^{n+1}\mathrm{I}_{\alpha,(\mu,\mathrm{f})}(\Theta_{\beta}^{\top}, \Theta_{\beta}^{\top}) = -\frac{1}{c_{m-1}}\int_{\mathrm{SM}}\{\mathcal{E}_{\alpha}(\mu,\mathrm{f})\langle \nabla\Theta_{\beta}^{\top}, \mathrm{df}\rangle^2 - \mathrm{h}(\nabla_{\mathrm{grad}^{\mathrm{H}}\mathcal{D}_{\alpha}(\mu,\mathrm{f})}\Theta_{\beta}^{\top} - \mathcal{E}_{\alpha}(\mu,\mathrm{f})\nabla_{\mathrm{M}^{\mathrm{H}}}\Theta_{\beta}^{\top} + \mathcal{E}_{\alpha}(\mu,\mathrm{f})\mathrm{trace}_{\mathrm{g}}\nabla^2\Theta_{\beta}^{\top} + \mathcal{E}_{\alpha}(\mu,\mathrm{f})\mathrm{trace}_{\mathrm{g}}\mathrm{R}^{\mathrm{S}}(\Theta_{\beta}^{\top}, \mathrm{df})\mathrm{df}, \Theta_{\beta}^{\top})\}\mathrm{dV}_{\mathrm{SM}} = -\frac{\mathcal{D}_{\alpha}(\mu,\mathrm{f})}{c_{m-1}} \times \sum_{\beta}\int_{\mathrm{SM}}\mu\circ\mathrm{f}\Upsilon\circ\mathrm{f}\langle \tau_{\alpha}(\mu,\mathrm{f}), \Theta_{\beta}^{\top}\rangle\mathrm{dV}_{\mathrm{SM}}$$

$$-\frac{\mathcal{E}_{\alpha}(\mu,\mathrm{f})}{c_{m-1}}\int_{\mathrm{SM}}\mathrm{grad}|\mu\circ\mathrm{f}|^2\mathrm{dV}_{\mathrm{SM}}. \qquad ۵۱$$

با استفاده از رابطهٔ ۵۱ داریم

$$\sum_{\beta=1}^{n+1}\mathrm{I}_{\alpha,(\mu,\mathrm{f})}(\Theta_{\beta}^{\top}, \Theta_{\beta}^{\top}) < 0. \qquad ۵۲$$

در این صورت f پایا نیست و از این رو اثبات را کامل می‌کند.

مدل‌سازی نقص‌های توپولوژیکی در بلورهای مایع ناهمسانگرد با استفاده از نگاشت‌های α-هارمونیک

هدف ما در این بخش، ارائه و سپس موشکافی یک کاربرد فیزیکی ملموس از نظریهٔ نگاشت‌های α- هارمونیک با پتانسیل روی منیفلدهای فینسلری می‌باشد. برای این منظور مسأله تشکیل و پایداری نقص‌های توپولوژیکی در بلورهای مایع ناهمسانگرد[1] تحت یک میدان خارجی را به‌عنوان یک سیستم پیچیده فیزیکی مطالعه نموده سپس نشان می‌دهیم که چارچوب ریمانی سنتی در توصیف دقیق ناهمسانگردی و رفتارهای غیرخطی سیستم دچار محدودیت است. در ادامه، نگاشت جهت‌گیری مولکولی را با به‌کارگیری یک منیفلد فینسلری از نوع مینکوفسکی موضعی و تعریف یک تابع انرژی کل با پتانسیل خارجی، به‌عنوان یک نگاشت α- هارمونیک با پتانسیل معرفی می‌نماییم. با حل تحلیلی معادلهٔ اویلر–لاگرانژ تحت تقارن کروی، به‌یک آستانه پایداری α_c خواهیم رسید که به‌طور مستقیم به پارامتر α و جمله انتشاری b_i وابسته بوده و نشان می‌دهد که پایداری نقص‌ها از طریق ساختار هندسی و غیرخطی در چارچوب هندسه فینسلری به‌صورت طبیعی کنترل می‌شود. در نهایت این نتیجه را با مدل‌های کلاسیک لانداو–دژنر[2] و اریکسن–لسلی[3] مقایسه کرده و در نهایت ثابت می‌کنیم که این رویکرد نه تنها سازگار با نظریه‌های موجود بوده بلکه افق‌های نو در مورد گذار فاز و کنترل پایداری نقص‌ها ارائه می‌نماید.

[1] Topological defects in anisotropic liquid crystals

[2] Landau-de Gennes

[3] Ericksen-Leslie

برای مدل‌سازی این سیستم ما، از نگاشت‌های $\boldsymbol{\alpha}$- هارمونیک با پتانسیل $\boldsymbol{\mu}$ روی منیفلد فینسلری استفاده نمودیم. در روند اثبات می‌نماییم که این چارچوب علاوه بر تولید ساختارهای قبلی بینشی جدید دربارهٔ نقش پارامترهای هندسی در پایداری نقص‌ها به‌دست می‌دهد.

با فرض بلور مایع به‌عنوان یک سیستم ناهمسانگرد جهت گیری مولکولی بلور با یک نگاشت $f: (M, F) \to (\mathbb{S}^2, h_{std})$ توصیف خواهد شده که $M \subset \mathbb{R}^3$ دامنهٔ فضایی آن بوده و F یک متریک فینسلری از نوع مینکوفسکی موضعی است:

$$F(x,y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j} + b_i(x)y^i, \qquad ۵۳$$

که a_{ij} تانسور ناهمسانگردی و b_i جمله انتشاری (ناشی از یک جریان خارجی) و f جهت‌گیری مولکولی[1] را به کره واحد $\mathbb{S}^2$ می‌نگارد. پتانسیل $\mu: M \longrightarrow (0,\infty)$ توزیع انرژی آزاد خارجی ناشی از یک میدان الکتریکی یا مغناطیسی بوده:

$$\mu(x) = 1 + \varepsilon|F(x)|^2, \quad \varepsilon > 0, \qquad ۵٤$$

که در آن $F(x)$ شدت میدان خارجی در نقطهٔ x را نمایندگی می‌کند. خاصه، اگر $E(x)$ میدان الکتریکی باشد، آنگاه $F(x) = E(x)$ و انرژی آزاد حاصل از تعامل جهت‌گیری مولکولی بلور با میدان الکتریکی، به‌صورت $|E(x)|^2$ وارد خواهد شد. مشابهاً تحت یک میدان مغناطیسی یکنواخت یا متغیر با جایگاه $B(x)$ خواهیم داشت:

در نظر می‌گیریم $M = B_R(۰)$ دامنهٔ کروی و میدان خارجی شعاعی باشد:

$$E(x) = E_0 \frac{x}{|x|}, \qquad ۵۵$$

لذا:

$$\mu(x) = 1 + \varepsilon E_0^2. \qquad ۵٦$$

همچنین، متریک فینسلری را با $a_{ij} = \mathrm{diag}(1,1.5,1.5)$ و $b_i = (0.1,0,0)$ در نظر می‌گیریم. با این انتخاب‌ها ناهمسانگردی و جهت‌گیری ذاتی سیستم مدل‌سازی خواهد شد. نگاشت f را به‌فرم $f(x) = x/|x|$ (جهت‌گیری شعاعی) با توجه به تقارن کروی مسأله، در نظر می‌گیریم. با جای‌گذاری نگاشت f در معادلهٔ $\tau_\alpha(\mu, f) = 0$ و با استفاده از تحلیل تانسوری روی SM می‌بینیم که که f یک نقطهٔ بحرانی است اگر و تنها اگر $\alpha > \alpha_c$ که در آن:

$$\alpha_c = 1 + \frac{1}{2}\frac{\langle b, \nabla\mu\rangle}{|\nabla\mu| + \kappa\sqrt{\mu}}. \qquad ۵۷$$

که در اینجا:

$$\kappa = \frac{1}{2}\frac{\langle b, L(\nabla\mu)\rangle}{|\nabla\mu|\sqrt{\mu}}, \qquad ۵۸$$

می‌باشد و $L(\nabla\mu)$ اثر تانسور لندزبرگ L_{ijk} بر گرادیان پتانسیل $\nabla\mu$ و $\langle ۰,۰\rangle$ ضرب داخلی متناظر با متریک a_{ij} می‌باشد. حال با توجه به‌اینکه برای منیفلدهای مینکوفسکی موضعی داریم:

$$L_{ijk} = 0, \qquad ۵۹$$

لذا:

$$\kappa = 0. \qquad ٦۰$$

با توضیحات بالا عبارت آستانهٔ پایداری برای چنین منیفلدهایی به‌فرم زیر ساده می‌شود:

[1] Direction Field

$$\alpha_c = 1 + \frac{1}{2}\frac{\langle b, \nabla\mu\rangle}{|\nabla\mu|}. \qquad ۶۱$$

نتیجه فوق نشان می‌دهد که جملهٔ انتشاری b_i و پارامتر α به‌طور مشترک بر پایداری نقص تأثیر و کنترل دارند. خاصه، در صورت موازی بودن b_i و $\nabla\mu$، $\alpha_c > 1$ و برای پایداری نیاز به غیرخطی بودن بیشتر وجود دارد. این بینش به‌دست آمده از چارچوب فینسلری با روش‌های ریمانی قابل دستیابی نیست.

مقایسه با مدل‌های کلاسیک : لانداو–دژنر و اریکسن–لسلی

در اینجا ما برتری و نوآوری چارچوب خود را که بر نگاشت‌های α _هارمونیک با پتانسیل روی منیفلدهای فینسلری بنا شده را از طریق قیاس سیستماتیک با دو مدل بنیادی در فیزیک بلورهای مایع یعنی مدل لانداو–دژنر و مدل اریکسن–لسلی را نمایان می‌سازیم. بدین منظور، ثابت می‌کنیم که در حالت حدی $\alpha \to 1$ و $b_i \to 0$، تابع انرژی ما تقلیل یافتهٔ تابع انرژی اریکسن در مدل‌های ساده شدهٔ لانداو–دژنر خواهد بود که بیانگر سازگاری و پیوستگی چارچوب جدید و نظریه‌های کلاسیک گذشته است. با این وجود تفاوت کلیدی چارچوب ما و مدل اریکسن–لسلی در این است که چارچوب ما به‌طور طبیعی و با ساختار هندسی فینسلری و پارامتر غیرخطی α، ناهمسانگردی ذاتی و کنترل پایداری نقص‌ها را توصیف می‌کند در حالی که مدل کلاسیک پایداری مصنوعی را با تعریف تانسورهای تکمیلی و شرایط مرزی خاص به‌دست می‌آید لذا این قیاس نشان دهندهٔ انسجام و غنی‌تر بودن تعمیم ما نسبت به مدل کلاسیک است نیز بینشی نو دربارهٔ مکانیسم کنترل پایداری در سیستم‌های ناهمسانگرد به‌دست می‌دهد.

مقایسه با مدل لانداو–دژنر. در این مدل، تابع انرژی آزاد سیستم برحسب یک تانسور مرتبه دو Q_{ij} تعریف شده و میدان جهت‌گیری را در مقیاس مایکروسکوپی توصیف می‌نماید. تابع انرژی به‌فرم زیر است:

$$\mathcal{F}_{\mathrm{LdG}}[Q] = \int_M \left[\frac{A}{2}Q_{ij}Q_{ji} + \frac{B}{3}Q_{ij}Q_{jk}Q_{ki} + \frac{C}{4}(Q_{ij}Q_{ji})^2 + \frac{L}{2}(\nabla_k Q_{ij})(\nabla_k Q_{ij})\right] dV, \qquad ۶۲$$

که در آن ضرایب A, B, C و L پارامترهای مؤثر این مدل می‌باشند.

در حالت خاص که Q به‌فرم $Q_{ij} = S\left(n_i n_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right)$ باشد، در ناحیه‌هایی با مرتبهٔ ثابت S، این تابع به‌جملهٔ انرژی اریکسن تحویل می‌شود:

$$\mathcal{F}_{\mathrm{Ericksen}}[n] = \frac{LS^2}{2}\int_M |\nabla n|^2\, dV. \qquad ۶۳$$

در ساختار پیشنهادی ما، تابع انرژی کل سیستم در حالت حدی $\alpha \to 1$ و $b_i \to 0$، متریک فینسلری $F(x,y)$ به متریک ریمانی $g_{ij}(x)$ تقلیل یافته و باند SM با $S_x M$ یک‌ریخت خواهند شد. در این مدل، انتگرال روی SM به انتگرال حجمی روی M تبدیل شده و داریم:

$$\lim_{\alpha\to 1}\lim_{b_i\to 0} E_{(\alpha,\mu)}(f) = \frac{1}{c_{m-1}}\int_M \left(\int_{S_x M}(1 + |df|^2)\, d\sigma(y)\right)\mu(f(x))\, dV_g. \qquad ۶۴$$

با توجه به‌اینکه $\int_{S_x M}|df|^2\, d\sigma(y) = c_{m-1}|\nabla f|^2$، این فرمول به‌شکل زیر ساده می‌شود:

$$E(f) = \int_M (1 + |\nabla f|^2)\mu(f(x))\, dx, \qquad ۶۵$$

که دقیقاً همان جملهٔ انرژی اریکسن در حضور یک پتانسیل خارجی μ می‌باشد. حال برای واکافت بهتر و دقیق‌تر تعمیم غیرخطی مدل پیشنهادی، تابع چگالی انرژی را به‌صورت

$$e_\alpha(\mu, f) = \mu(f(x))(1 + |df|^2)^\alpha \qquad ۶۶$$

در نظر گرفته که در آن $\mu(f(x))$ تابع وزنی وابسته به مقدار f در نقطه x و $|df|^2 = g^{ij}\,\partial_i f \partial_j f$ نرم مربع دیفرانسیل f تحت متریک ریمانی g می‌باشد. برای آنالیز حساسیت سیستم به تغییرات گرادیان تابع f، مشتق جزئی تابع چگالی انرژی نسبت به $|df|^2$ به فرم زیر رایانش می‌شود:

$$\frac{\partial e_\alpha}{\partial |df|^2} = \alpha \mu(f(x))(1+|df|^2)^{\alpha-1}. \qquad ٦٧$$

مشتق بالا نشانگر پاسخ سیستم به تغییرات $|df|^2$ به‌صورت توانی از $(1+|df|^2)$ می‌باشد و ضریب حساسیت آن، α، یک پارامتر کنترل‌کنندهٔ غیرخطی است. برای $\alpha > 1$، عبارت فوق با افزایش $|df|^2$ ، اگر $\alpha < 2$ باشد کاهش و اگر $\alpha > 2$، افزایش می‌یابد که نشان‌دهندهٔ رفتار غیرخطی پیچیده‌تری نسبت به مدل‌های کلاسیک است. از آن سو در مدل لانداو–دژنر، انرژی به فرم چندجمله‌ای از متغیر نظم Q به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathcal{E}_{LD} = \frac{a}{2}|Q|^2 + \frac{b}{4}|Q|^4 + \cdots, \qquad ٦٨$$

که غیر خطی بودن تنها از جملات $|Q|^4$ و بالاتر وارد شده و ضرایب a, b بایستی از داده‌های تجربی تعیین گردند. در چارچوب ما غیرخطی بودن به فرم هندسی و به صورت $(1+|df|^2)^\alpha$ در خود تابع انرژی نهفته است و نیازی به افزودن دستی جملات غیرخطی نداریم. ما برای توصیف ناهمسانگردی ذاتی سیستم از یک ساختار فینسلری استفاده نمودیم.

فرض کنید $F(x,y)$ یک متریک مینکوفسکی موضعی باشد:

$$F(x,y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j} + b_i(x)y^i, \qquad ٦٩$$

که در آن $a_{ij}(x)$ یک تانسور متقارن و مثبت–معین و $b_i(x)$ یک میدان برداری می‌باشد. متریک ناهمسانگردی معرفی شده جهتی را در فضای مماسی T_xM کدگذاری می‌نماید. اکنون تابع انرژی کلی سیستم را به‌صورت انتگرال روی SM تعریف می‌کنیم:

$$E_{(\alpha,\mu)}(f) = \sum_i \int_{SM} \left(1 + \mathrm{trace}_g h\big(f_*(\Xi), f_*(\Xi)\big)\right)^\alpha \mu(f(x))\,dV_{SM} \qquad ٧٠$$

که در آن $\Xi \in T_xM$ بردار یکه، $f_*: T_xM \to T_{f(x)}N$ دیفرانسیل نگاشت f و h متریک القایی روی $\mathbb{S}^2$ می‌باشد که اندازهٔ تغییرات f در جهت Ξ را می‌سنجد:

$$h(f_*(\Xi), f_*(\Xi)) = |df(\Xi)|^2. \qquad ٧١$$

بنابر این تعاریف و محاسبات، میانگین‌گیری انرژی در تمام جهت‌های مماسی همان انتگرال‌گیری روی SM بوده نیز وابستگی به a_{ij} و b_i از طریق ساختار F و در نتیجه dV_{SM} به‌فرم هندسی در تابع انرژی گنجانده می‌شود. این ساختار با مدل لانداو–دژنر در تضاد است چرا که مدل لانداو–دژنر ورود ناهمسانگردی تنها از طریق جملات تجربی مانند

$$\beta_{ijkl}\,\partial_i Q_j\,\partial_k Q_l \qquad ٧٢$$

و با تانسورهای ضریب β_{ijkl} است که بایستی به‌صورت تجربی تعیین گردند. در حالی‌که در چارچوب ما، ناهمسانگردی از خود ساختار هندسی فضای پیکربندی ناشی می‌شود. مشاهده می‌کنیم که رویکرد ما یک تعمیم هندسی، غیرخطی و ذاتاً ناهمسانگرد از مدل لانداو–دژنر را به‌دست می‌دهد که برگرفته از یک اصل تغییراتی طبیعی و هماهنگ با هندسهٔ زیرین فضای فیزیکی است.

مقایسه با مدل اریکسن–لسلی این مدل دینامیک مواد ناهمسانگرد مانند مایعات کریستالی را در چارچوبی استاندارد توصیف نموده که ترکیبی از معادلات ناویر–استوکس تعمیم‌یافته و معادلات تکامل برای متغیر نظم (مثلاً بردار $n(x,t)$ در مدل اریکسن یا تانسور Q در مدل

اریکسن–لسلی تعمیم‌یافته) می‌باشد. در این مدل، تکامل زمانی میدان جهت‌گیری $n(x,t)$ از طریق معادلهٔ دینامیکی زیر کنترل می‌شود:

$$\gamma_1 \dot{n} + \gamma_2 (n \cdot \nabla) u = -\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta n}, \qquad ۷۳$$

که $\mathcal{F}[n, \nabla n]$ تابع انرژی آزاد (معمولاً از نوع اریکسن) است:

$$\mathcal{F}[n] = \int_\Omega \left[\frac{k_1}{2} (\nabla \cdot n)^2 + \frac{k_2}{2} (n \cdot \nabla \times n)^2 + \frac{k_3}{2} |n \times (\nabla \times n)|^2 \right] dx, \qquad ۷۴$$

و γ_1, γ_2 ضرایب ویسکوزیته مایع کریستالی هستند. همچنین تانسور تنش ویسکوز σ^v تجربی و به‌صورت تابعی از n، $\dot{n}$، و گرادیان سرعت ∇u تعریف می‌شود:

$$\sigma^v = \alpha_1 (n \otimes n) : (\nabla u)\, n \otimes n + \alpha_2\, n \otimes \dot{n} + \alpha_3\, \dot{n} \otimes n + \alpha_4\, D + \alpha_5\, n \otimes (Dn) + \alpha_6\, (Dn) \otimes n, \qquad ۷۵$$

که $D = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ تانسور نرخ کرنش[1] و ضرایب α_i(ضرایب لسلی) بایستی از طریق آزمایش رایانش گردند. این تانسورها علاوه بر تأثیر روی دینامیک سیال در تعیین پایداری موضعی و کیفی سیستم نقشی اساسی دارند. در مدل اریکسون–لسلی پایداری سیستم از طریق شرایط لزومی روی ضرایب ویسکوزیته کنترل می شود که عبارتند از:

$$\alpha_4 > 0, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_5 + \alpha_6 \geq 0, \quad \text{و} \quad k_1, k_2, k_3 > 0, \qquad ۷۶$$

که شرایط فوق از تحلیل انرژی یا مثبت‌بودن نرخ تولید آنتروپی به‌دست می‌آیند. این امر نشانگر کنترل پایداری در این مدل به‌صورت غیرمستقیم و از طریق اعمال محدودیت‌های تجربی به‌ضرایب خارجی می‌باشد.

در این سو، چارچوب پیشنهادی ما، با محاسبهٔ فرم دوم تغییرات $\delta^2 E$ پایداری موضعی را بررسی می‌نماید. حال یک اختلال کوچک δf در میدان f ، را در نظر گرفته و با به‌کارگیری گسترش تیلور مرتبه دوم داریم:

$$I_{\alpha,(\mu,f)} = \int_{SM} \Big[\alpha(\alpha-1)\mu(f)(1 + |df|^2)^{\alpha-2}(\delta|df|^2)^2 + (1 + |df|^2)^\alpha \frac{\partial^2 \mu}{\partial f^2}(\delta f)^2 \Big] dV_{SM}. \qquad ۷۷$$

$I_{\alpha,(\mu,f)} \geq 0$ برای تمام اختلالات آزمایشی و همچنین $\delta f \in C_0^\infty(SM)$ شرط لازم برای پایداری موضعی است. با فرض $\mu(f) \geq 0$ و $\mu''(f) \geq 0$ و با توجه به $\alpha > 1$، عبارت اولیه در این انتگرال نامنفی است

(چرا که $\alpha(\alpha-1) > 0$ و توان $\alpha - 2$ برای $\alpha \geq 1$ تعریف‌شده است) لذا پارامتر هندسی α به‌طور طبیعی پایداری سیستم را کنترل می‌کند: با بزرگتر شدن α شدت واکنش سیستم به نوسانات تندتر (f یعنی $|df|$ بزرگ) بالاتر رفته و سیستم تمایل به‌همواری بیشتری پیدا می‌کند. و در مقابل در مدل اریکسن–لسلی، پایداری علاوه بر ضرایب الاستیک k_i به ضرایب ویسکوز α_i نیز وابسته است که اغلب نیاز به اعمال شرایط پایداری به‌صورت دستی و بر اساس داده‌های تجربی وجود دارداین امر باعث خوداتکایی کمتر مدل از نظر تئوریک شده و تحمیل پایداری به‌جای اشتقاق از ساختار انرژی از طریق تانسورهای خارجی صورت می‌پذیرد.

با توجه به پژوهش‌های قبلی فرم ساخت‌ها نیاز به‌تعریف تانسورهای تنش ویسکوز یا ضرایب تجربی اضافی را با ارائهٔ یک اصل تغییراتی منسجم و استخراج پایداری از فرم دوم انرژی را رفع می‌نماید. این ویژگی چارچوب ما را برای توصیف سیستم‌های ناهمسانگرد از لحاظ نظری و پایهٔ

[1] Rate-of-strain tensor

ریاضی نیرومندتر ساخته که در آن کنترل پایداری ذاتی و از طریق ساختار هندسی و غیرخطی تابع انرژی می‌باشد.

تحلیل پایداری و تفسیر فیزیکی فرم دوم تغییرات

فرم دوم تغییرات انرژی حول یک نگاشت بحرانی $f: M \to N$ یک شاخص از پایداری دینامیکی است که نمایندهٔ یک پیکربندی تعادلی در سیستم فیزیکی می‌باشد، این فرم برای هر میدان اختلال $\upsilon \in \Gamma(f^{*}TN)$ به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$I_{\alpha,(\mu,f)}(\upsilon,\upsilon) = \int_{SM} [\mathcal{D}_{\alpha}(\mu,f)|\nabla\upsilon|^2 + \mathcal{E}_{\alpha}(\mu,f)\langle\nabla df,\upsilon\rangle^2 - \mu(f)\,\mathcal{D}_{\alpha}(\mu,f)\,Ric^{N}(\upsilon,\upsilon)]dV_{SM}, \quad ۷۸$$

که در آن:

$$\mathcal{D}_{\alpha}(\mu,f) = \alpha(\alpha-1)\mu(f)(1+|df|^2)^{\alpha-2}, \quad ۷۹$$

و

$$\mathcal{E}_{\alpha}(\mu,f) = \alpha\mu(f)(1+|df|^2)^{\alpha-1}. \quad ۸۰$$

این ساختار نشانگر توزیع انرژی پتانسیل مؤثر سیستم به‌صورت غیرهولونومیک و وابسته به جهت‌ها در فضای مماسی است. عبارت $|\nabla\upsilon|^2$ در تابعک انرژی، هزینهٔ انرژی مرتبط با ناهمواری‌های محلی در جهت اختلال است، در حالی که عبارت $\langle\nabla df,\upsilon\rangle^2$ تعامل بین ناهمواری اولیهٔ f و جهت اختلال υ را نمایش می‌دهد. تأثیر انحنای فضای هدف N بر پایداری توسط عبارت منفی شامل Ric^{N} نشان داده شده نیز داریم: انحنای مثبت $Ric^{N} > 0$ تمایل به ناپایداری داشته در حالی که انحنای منفی با ایجاد سهم منفی در انرژی افزایشی، باعث تقویت پایداری می‌گردد. این فرم دوم با عملگر خودالحاق $\mathcal{L}_{\alpha,f}$ متناظر است:

$$I_{\alpha,(\mu,f)}(\upsilon,\upsilon) = \int_{SM} \langle\mathcal{L}_{\alpha,f}\upsilon,\upsilon\rangle\, dV_{SM} \quad ۸۱$$

که روی فضای هیلبرت $L^2(SM, f^{*}TN)$ عمل می‌نماید. رفتار پایداری سیستم را طیف گسسته و مرتب‌شدهٔ $\{\lambda_k(\alpha)\}_{k=1}^{\infty}$ این عملگر، تعیین نموده، به‌ویژه، پایداری پیکربندی f معادل است با:

$$\lambda_{min}(\alpha) \geq 0. \quad ۸۲$$

اگر f نگاشت شعاعی (مثلاً در یک مدل کروی تقارن‌یافته) و $N = \mathbb{S}^{۲}$، آنگاه تحلیل طیفی نشان می‌دهد که کوچکترین مقدار ویژه به‌صورت تابعی تحلیلی از α تغییر می‌کند. در همسایگی یک مقدار بحرانی α_c، بسط مرتبهٔ اول به‌فرم زیر است:

$$\lambda_{min}(\alpha) = C_1(\alpha-\alpha_c) + o(|\alpha-\alpha_c|), \quad \alpha \to \alpha_c, \quad ۸۳$$

که در آن:

$$C_1 = \left.\frac{d\lambda_{min}}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_c} > 0. \quad ۸٤$$

رابطهٔ بالا نمایانگر آنست که α مشابه دما در سیستم‌های ترمودینامیکی، نقش یک پارامتر کنترلیرا بازی می‌کند. هرگاه α از زیر به بالای α_c بلغزد، سیستم از حالت ناپایدار به حالت پایدار می‌رود:

$$\alpha < \alpha_c \lambda_{min} < 0 \quad \text{ناپایدار} \quad ۸۵$$

$$\alpha > \alpha_c \lambda_{min} > 0 f \quad \text{پایدار} \quad ۸٦$$

آشکار این گذار، یک گذار فاز مرتبهٔ دوم بوده و مشتق اول انرژی آزاد (در اینجا عملگر خطی‌شده) پیوسته اما مشتق دوم (یا همان طیف عملگر) تغییر ناگهانی در علامت دارد. λ_{min} در اینجا، به‌عنوان یک تابع دستور عمل کرده و α_c نقطهٔ بحرانی سیستم می‌باشد. در $\alpha = \alpha_c$، داریم $\lambda_{min} = 0$، که نشان دهندهٔ وجود یک حالت صفر $\upsilon_0 \in \ker\mathcal{L}_{\alpha_c,f}$ می‌باشد. این حالت صفر یک جهت ناپایدار در فضای

پیکربندی است که به شکستن تقارن و ظهور یک پیکربندی جدید با انرژی پایین‌تر منجر می‌شود که دقیقاً مشابه رفتار سیستم‌هایی مانند مایعات کریستالی یا مدل‌های گینزبرگ–لانداو در حوالی دمای بحرانی می‌باشد.

بنابراین، پارامتر α علاوه بر اینکه یک ضریب ریاضی در تابعک انرژی است، یک متغیر فیزیکی کنترل‌کنندهٔ گذار فاز نیز می‌باشد. در مقیاس‌های کوچک (مقادیر پایین α)، سیستم به‌نوسانات حساس و رفتار غیرخطی کم و در مقیاس‌های بزرگ (مقادیر بالای α)، سیستم، مشابه یک فاز سفت‌تر در مواد، تمایل به‌همواری و مقاومت بیشتری در برابر اختلالات خواهد داشت.

این بخش، برای نخستین بار برای حل یک مسأله فیزیکی واقعی در فیزیک مواد نرم از نگاشت‌های α_هارمونیک با پتانسیل روی منیفلدهای فینسلری، استفاده کرده و نشان دادیم که این چارچوب قادر به مدل‌سازی دقیق ناهمسانگردی بوده نیز پیش‌بینی‌های جدیدی دربارهٔ پایداری نقص‌های توپولوژیکی به‌دست می‌دهد و در نهایت به یک پارامتر کنترلی جدید (α) دست می‌یابیم که می‌تواند شاخصی از درجهٔ غیرخطی بودن مؤثر در سیستم باشد. نتایج به‌دست آمده نه تنها اعتبار فیزیکی چارچوب ریاضی معرفی شده را تأیید می‌کند، بلکه نقشه‌ای برای کاربردهای آینده و توسعه مدل‌های پیشرفته در سیستم‌های پیچیده نظیر ابررساناها، مواد فرومغناطیس و ساختارهای کیهانی نیز مدل‌سازی دقیق آنها را فراهم می‌سازند.

مرجع‌ها

[1] S. Albuquerque, V.B. Bezerra, I.P. Lobo, G. Macedo, P.H. Morais, E. Rodrigues, L.C.N. Santos, G. Varão, Quantum configuration and phase spaces: Finsler and Hamilton geometries, Physica A 5 (1) (2023) 90–115. https://doi.org/10.1016/j.physa.2022.127890

[2] F. Alouges, A new algorithm for computing liquid crystal stable configurations: the harmonic mapping case, SIAM J. Numer. Anal. 34 (5) (1997) 1708–1726. https://doi.org/10.1137/S0036142995282138

[3] J. Eells, J.H. Sampson, Harmonic mappings of Riemannian manifolds, Am. J. Math. 86 (1) (1964) 109–160. https://doi.org/10.2307/2373004

[4] F. Fernández Villaseñor, Lorentz-Finsler geometry and Einstein equations, PhD Thesis, Universidad de Granada, 2024.

[5] S.M. Kazemi Torbaghan, M. Mirmohammad Rezaii, F-Harmonic maps between doubly warped product manifolds, Mathematics 5 (2) (2017) 20. https://doi.org/10.3390/math5020020

[6] S.M. Kazemi Torbaghan, K. Salehi, S. Babayi, Existence and Stability of α–Harmonic Maps, J. Math. 2022 (2022) 1906905. https://doi.org/10.1155/2022/1906905

[7] M. Krynski, M. Rossi, Efficient Gaussian process regression for prediction of molecular crystals harmonic free energies, npj Comput. Mater. 7 (1) (2021) 169. https://doi.org/10.1038/s41524-021-00610-z

[8] Y. Mei, P. Yu, Mapping heterogeneous elastic property distribution of soft tissues using harmonic motion data: A theoretical study, Math. Probl. Eng. 2018 (2018) 9131340. https://doi.org/10.1155/2018/9131340

[9] C.W. Misner, Harmonic maps as models for physical theories, Phys. Rev. D 18 (12) (1978) 4510. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.18.4510

[10] X. Mo, Harmonic maps from Finsler manifolds, Ill. J. Math. 45 (4) (2001) 1331–1345. https://doi.org/10.1215/ijm/1258138155

[11] X. Mo, An Introduction to Finsler Geometry, vol. 1, World Scientific, Singaore,

2006.

[12] X. Mo, Y. Yang, The existence of harmonic maps from Finsler manifolds to Riemannian manifolds, Sci. China Ser. A 48 (2005) 115–130. https://doi.org/10.1360/04ys0074

[13] K.O. Nikolaev, S.R. Lake, G. Schmidt, S.O. Demokritov, V.E. Demidov, Resonant generation of propagating second-harmonic spin waves in nano-waveguides, Nat. Commun. 15 (1)

[19] C. Sun, J. Kim, J. You, J.W. Jeong, Y. Heo, Y. Kim, Exploring higher-order harmonic eddy current in soft magnetic composites, J. Alloys Compd. 1003 (2024) 175641. https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2024.175641

[20] A. Tomasiello, Higher spins and Finsler geometry, J. High Energy Phys. 2024 (10) (2024) 1–32. https://doi.org/10.1007/JHEP10(2024)012

[21] T.M. Tierney, Z. Seedat, K. St Pier, S. Mellor, G.R. Barnes, Adaptive multipole models of optically pumped magnetometer data, Ann. N. Y. Acad. Sci. 45 (4) (2024) e26596. https://doi.org/10.1111/nyas.14987

[22] S.M.K. Torbaghan, M.M. Rezaii, Warped products, Biharmonic and semi-conformal maps, Math. Rep. 21 (4) (2019) 441–459.

[23] G.F. Wang, P. Schiavone, C.Q. Ru, Harmonic shapes in finite elasticity, Math. Mech. Solids 12 (5) (2007) 502–512. https://doi.org/10.1177/1081286506067097

[24] İ. Yurdusen, Explicit examples of constant curvature surfaces in the supersymmetric CP^2 sigma model, Turk. J. Math. 46 (6) (2022) 2485–2499. https://doi.org/10.3906/mat-2203-52

(2024) 1827. https://doi.org/10.1038/s41467-024-46066-7

[14] L.L. Nguyen, Singular harmonic maps into hyperbolic spaces and applications to general relativity, PhD Thesis, Rutgers The State University of New Jersey, School of Graduate Studies, 2009.

[15] G. Ren, Y.S. Duan, Extended theory of harmonic maps connects general relativity to chaos and quantum mechanism, Chaos Solitons Fractals 103 (2017) 567–570. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2017.07.004

[16] J. Sacks, K. Uhlenbeck, The existence of minimal immersions of 2-spheres, Ann. Math. 113 (1) (1981) 1–24. https://doi.org/10.2307/1971131

[17] A. Shahnavaz, N. Kouhestani, S.M. Kazemi Torbaghan, The Morse Index of Sacks–Uhlenbeck α-Harmonic Maps for Riemannian Manifolds, J. Math. 2024 (2024) 2692876. https://doi.org/10.1155/2024/2692876

[18] P. Stavrinos, S.I. Vacaru, Broken Scale Invariance, Gravity Mass, and Dark Energy in Modified Einstein Gravity with Two Measure Finsler Like Variables, Universe 7 (4) (2021) 89. https://doi.org/10.3390/universe7040089