Document Type: Full length research Paper
Pages: 17-25

Thermodynamic Geometry of Ideal gas with Bose-Dunkl statistics

Maryam Seifi, Zahra Ebadi*, Hosein Mohammadzadeh

Department of Physics, University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil, Iran

Received: 26.05.2025 Final revised: 27.01.2026 Accepted: 14.02.2026 Published On-Line: 31.05.2026

DOI: 10.22055/jrmbs.2026.49758.1903

Abstract

In this paper, we investigate the thermodynamic geometry of an ideal gas composed of particles obeying the generalized Bose-Dunkl statistics. We first derive the generalized commutation relations for bosonic and fermionic systems with specific parity features using the Dunkl operator. Then, we compute the thermodynamic curvature of these systems and compare it with the ideal Bose gas. The results show that the thermodynamic curvature remains positive for negative values of the Dunkl parameter, similar to the Bose ideal gas, while for positive values of the parameter, the curvature initially becomes negative and then turns positive for values beyond a certain threshold. These results are consistent with the fermionic and bosonic behaviors in these systems. Additionally, the thermodynamic curvature diverges at the fugacity value of z=1 for all values of the Dunkl parameter, similar to the ideal Bose gas.

Keywords: Dunkl operator - generalized statistics – Thermodynamic Geometry

* Corresponding Author: z.ebadi@uma.ac.ir

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

هندسهٔ ترمودینامیکی گاز ایده‌ال با آمار بوز–دانکل

مریم سیفی، زهرا عبادی*، حسین محمدزاده

گروه فیزیک، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل، ایران

دریافت: ۱٤۰٤/۰۳/۰۵ ویرایش نهائی: ۱٤۰٤/۱۱/۰۷ پذیرش: ۱٤۰٤/۱۱/۲۵ انتشار بر خط: ۱٤۰۵/۰۳/۱۰

DOI:10.22055/jrmbs.2026.49758.1903

چکیده

در این مقاله، هندسهٔ ترمودینامیکی سیستم‌های گاز ایده‌آل با ذراتی که از آمار تعمیم‌یافتهٔ بوز–دانکل پیروی می‌کنند را بررسی کرده‌ایم. ابتدا با استفاده از عملگر دانکل، روابط جابه‌جایی تعمیم‌یافته برای سیستم‌های بوزونی و فرمیونی با ویژگی‌های خاص پاریته را تدوین کرده‌ایم. سپس انحنای ترمودینامیکی این سیستم‌ها را در مقایسه با گاز ایده‌آل بوزونی محاسبه کرده‌ایم. نتایج نشان می‌دهد که انحنای ترمودینامیکی برای مقادیر منفی پارامتر دانکل مشابه گاز ایده‌آل بوزونی مثبت باقی می‌ماند، در حالی که برای مقادیر مثبت این پارامتر، انحنا ابتدا منفی و سپس برای مقادیر بزرگتر از یک آستانهٔ معین، مثبت می‌شود. این نتایج با رفتار فرمیون‌گونه و بوزون‌گونه در این سیستم‌ها هماهنگ است. همچنین، انحنای ترمودینامیکی در مقدار گریزندگی $z=1$ برای تمام مقادیر پارامتر دانکل مشابه گاز ایده‌آل بوزونی واگرا می‌شود.

کلیدواژگان: عملگر دانکل، آمار تعمیم‌یافته، ترمودینامیک هندسی

مقدمه

گاز ایده‌آل کوآنتومی چارچوبی بنیادی برای توصیف رفتار آماری ذرات فراهم می‌کند که در آن، توزیع‌های استاندارد فرمی–دیراک و بوز–اینشتین نقش محوری دارند. به‌ویژه، توزیع بوز–اینشتین در دماهای پایین منجر به پدیدهٔ چگالش بوز–اینشتین می‌شود؛ حالتی که در آن بخش قابل توجهی از ذرات بوزونی در پایین‌ترین تراز انرژی تجمع یافته و رفتار کوآنتومی جمعی در مقیاس ماکروسکوپی ظاهر می‌شود. با این حال، در حضور تقارن‌های خاص و ویژگی‌های پاریته‌ای، به‌کارگیری چارچوب‌های تعمیم‌یافته برای توصیف چنین سیستم‌هایی اهمیت می‌یابد. در این راستا، عملگر دانکل به‌عنوان ابزاری مناسب برای در نظر گرفتن تقارن‌های انعکاسی معرفی می‌شود.

عملگر دانکل که توسط چارلز دانکل در اواخر دهه ۱۹۸۰ معرفی شد در واقع یک تعمیم از تابع نمایی استاندارد را معرفی می‌کند. تابع نمایی استاندارد، یک ویژگی خاص دارد؛ وقتی مشتق آن را بگیرید، همان تابع را برمی‌گرداند. عملگرهای دانکل مانند عملگرهای مشتق معمولی هستند، اما با جزئیات اضافی. آنها تقارن‌های خاصی از فضایی که در آن کار می‌کنید، به‌ویژه بازتاب‌ها را در نظر می‌گیرند. شکل این عملگر به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۳–۱]:

* نویسنده مسئول: z.ebadi@uma.ac.ir

باز نشر این مقاله با ذکر منبع آزاد است.

این مقاله تحت مجوز کریتیو کامنز تخصیص ٤.۰ بین‌المللی می‌باشد

$$D_x = \partial_x + \frac{\theta}{x}(1 - R_x) \quad (۱)$$

که R_x عملگر انعکاس نسبت به x است. θ پارامتر دانکل است که نشان داده می‌شود مقادیر مجاز آن $\theta \geq -1/2$ است. اگر این عملگر روی تابع زوج اثر کند، مانند مشتق معمولی رفتار می‌کند اما روی توابع فرد رفتاری متمایز دارد. در واقع این عملگر حساس به پاریته است و بین پاریتهٔ زوج و فرد به‌وضوح تمایز قائل می‌شود.

محدودیت $(\theta \geq -1/2)$ که برای این عملگر در نظر گرفته می‌شود، ناشی از الزامات ریاضی مربوط به‌فضای تابعی است که عملگر دانکل بر روی آن عمل می‌کند. در نزدیکی نقطهٔ تکینگی $(x = 0)$، توابع باید قابل قبول در چارچوب نظریه باشد، همچنان انتگرال‌پذیر باقی بمانند و فضای هیلبرت مربوطه ساختار مناسبی داشته باشد. در صورتی که $(\theta < -1/2)$ باشد، این وزن به‌طور واگرا رفتار کرده و شرط انتگرال‌پذیری نقض می‌شود، در نتیجه عملگر دانکل خاصیت خودالحاقی (Self-adjointness) خود را از دست می‌دهد. این ویژگی برای اطمینان از واقعی‌بودن مقادیر ویژه و حفظ انسجام فیزیکی مدل ضروری است. بنابراین، شرط $(\theta \geq -1/2)$ تضمین‌کنندهٔ پایداری ریاضی و قابلیت تفسیر فیزیکی نتایج حاصل از این عملگر است.

عملگر دانکل زمینه‌ای برای تولید روابط جابه‌جایی در حضور تقارن‌های انعکاسی ایجاد کرد که منجر به کاربردهایی در مکانیک کوآنتومی و سایر زمینه‌های فیزیک شده است. مثلاً در ریاضیات، تحلیل فوریه تعمیم یافته‌ای معرفی می‌کند. همچنین در مکانیک کوآنتومی و سایر زمینه‌ها در فیزیک، به‌ویژه در سیستم‌هایی با ویژگی‌های متقارن (مانند کریستال‌ها یا ذرات خاص که به‌روش‌های خاصی برهم‌کنش دارند)، این عملگر و به‌واسطهٔ آن شکل تعمیم‌یافتهٔ معادلهٔ شرودینگر که به معادلهٔ شرودینگر–دانکل موسوم است، به توصیف دقیق‌تر توابع موج با توجه عمیق‌تر به‌خواص پاریتهٔ سیستم می‌پردازد [۸-٤].

هندسهٔ ترمودینامیکی

یکی از رویکردهای پیشرفته در تحلیل سیستم‌های ترمودینامیکی با آمار تعمیم‌یافته، استفاده از روش‌های هندسی در ترمودینامیک است که به‌عنوان **هندسهٔ ترمودینامیکی** شناخته می‌شود [۱۰و۹]. این مفهوم برای اولین بار توسط وینهولد مطرح شد، که وی با تعریف متریک بر پایهٔ مشتقات مرتبهٔ دوم انرژی داخلی، دیدگاهی هندسی به ترمودینامیک ارائه کرد [۱۱].

در این روش، متریک‌های مختلفی می‌توان بر اساس پتانسیل‌های ترمودینامیکی گوناگون تعریف کرد. به‌طور خاص، **متریک فیش–رائو** به‌صورت زیر، بر اساس مشتقات لگاریتم تابع پارش نسبت به پارامترهای ناافزایشی تعریف می‌شود:

$$g_{ij} = \frac{\partial^2 \ln(\Xi)}{\partial\beta^i \partial\beta^j} \quad (۲)$$

در این رابطه، (Ξ) تابع پارش و β^i نشان‌دهنده پارامترهای ناافزایشی است [۱۳و۱۲]. کمیت انحنای ترمودینامیکی در واقع اسکالر ریچی برای فضا یا رویهٔ

پارامترهای ترمودینامیکی است. اصولاً باید از اتصالات آفین محاسبه شوند، سپس تانسور ریمن به‌دست آید. در گام بعدی تانسور ریچی و در نهایت اسکالر ریچی محاسبه می‌شود. اما برای یک رویهٔ دو بعدی نشان داده شده است که عبارت زیر همان اسکالر ریچی مربوط به‌رویهٔ ترمودینامیکی دو بعدی یا همان انحنای ترمودینامیکی است [۱٦-۱۳]:

$$R=\frac{\begin{vmatrix} g_{\beta\beta} & g_{\gamma\gamma} & g_{\beta\gamma} \\ g_{\beta\beta,\gamma} & g_{\gamma\gamma,\beta} & g_{\beta\gamma,\beta} \\ g_{\beta\beta,\gamma} & g_{\gamma\gamma,\gamma} & g_{\beta\gamma,\gamma} \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} g_{\beta\beta} & g_{\beta\gamma} \\ g_{\gamma\beta} & g_{\gamma\gamma} \end{vmatrix}^2} \qquad ۳$$

که منظور از $\beta = 1/K_BT$ و $\gamma = -\mu/K_BT$ است که در آن μ پتانسیل شیمیایی و K_B ثابت بولتزمن است و پارامتر T دما است و رویهٔ دوبعدی ترمودینامیکی برحسب این دو پارامتر (β و γ) بنا شده است. در رابطهٔ فوق داریم:

$$g_{\beta\beta}=\frac{\partial^2 \ln \Xi}{\partial^2 \beta}=-\left(\frac{\partial U}{\partial \beta}\right)_{\gamma}$$

$$g_{\beta\gamma}=g_{\gamma\beta}=\frac{\partial^2 \ln \Xi}{\partial\beta\partial\gamma}=-\left(\frac{\partial N}{\partial \beta}\right)_{\gamma} \qquad ٤$$

$$g_{\gamma\gamma}=\frac{\partial^2 \ln \Xi}{\partial \gamma^2}=-\left(\frac{\partial N}{\partial \gamma}\right)_{\beta}$$

منظور از $g_{ij,k}$ نیز مشتقات عناصر متریک نسبت به پارامترهای ترمودینامیکی است. کمیات ترمودینامیکی انرژی داخلی و تعداد کل ذرات نیز از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$U=\int_0^{\infty}\epsilon\, n(\epsilon)\,\Omega(\epsilon)\,d\epsilon, \qquad ٥$$

$$N=\int_0^{\infty} n(\epsilon)\,\Omega(\epsilon)\,d\epsilon, \qquad ٦$$

که در آن $n(\epsilon)$ نشان دهندهٔ توزیع عدد اشغال و $\Omega(\varepsilon)$ چگالی حالت‌ها را مشخص می‌کند که برای ذرات غیرنسبیتی در سه بعد به‌شکل $\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)$ ساده می‌شود که در آن ε انرژی ترازها است.

مشخص شده است انحنای ترمودینامیکی گاز ایده‌آل کلاسیک برابر با صفر است که این امر به‌عدم وجود برهم‌کنش ذاتی میان ذرات نسبت داده می‌شود. در مقابل، انحنای ترمودینامیکی گاز ایده‌آل بوزونی (فرمیونی) به‌ترتیب مثبت (منفی) است که بر وجود برهم‌کنش آماری ذاتی جاذب (دافع) در این سیستم‌ها دلالت دارد. افزون بر این، وجود نقاط تکین در انحنای ترمودینامیکی به‌عنوان نشانه‌ای از وقوع گذارهای فاز در سیستم‌های ترمودینامیکی تفسیر می‌شود. [۱٤].

معرفی تابع توزیع عملگر بوز-دانکل

همان‌طور که آشنا هستیم، همیلتونی مربوط به نوسان‌گرهای بوزونی و فرمیونی را می‌توان بر اساس عملگرهای خلق و فنا بیان کرد. این عملگرها برای بوزون‌ها (فرمیون‌ها) به‌ترتیب از روابط جابه‌جایی (پادجابه‌جایی) استاندارد تبعیت می‌کنند. گسترش این روش برای توصیف نوسان‌گرهای کوآنتومی بوزونی، در

حالتی که تکانهٔ متناظر آن‌ها بر اساس عملگر دانکل تعمیم‌یافته تعریف شده باشد، منجر به روابط جابه‌جایی تعمیم‌یافته‌ای می‌گردد که به‌صورت زیر قابل ارائه است:

$$\left[a_i^D, a_j^{\dagger D}\right] = \delta_{ij}(1 + 2\theta R_i) \qquad ۷$$

که منظور از a_i^D و $a_i^{\dagger D}$ عمل‌گرهای فنا و خلق دانکلی هستند و θ پارامتر دانکل است. در این رابطه، (R_i) عملگر بازتاب (انعکاس) است که بر روی تابع موج یا هر تابعی عمل کرده و مؤلفهٔ مربوط به‌متغیر (x_i)را به‌صورت زیر تغییر می‌دهد:

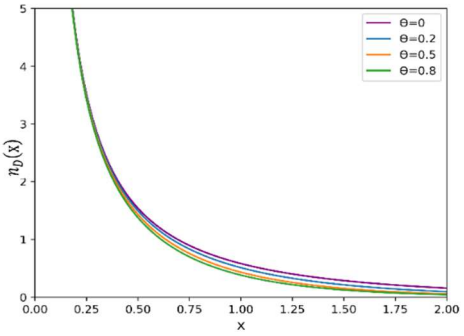
$$R_i f(x_i) = f(-x_i) \qquad ۸$$

به‌عبارت دیگر، عملگر (R_i) علامت مؤلفهٔ (x_i) را وارونه می‌کند. از آنجا که عملگر دانکل ذاتاً به‌تقارن بازتابی حساس است، حضور (R_i) در رابطهٔ جابه‌جایی به‌این معناست که هنگام خلق یا فنا شدن یک ذرهٔ دانکلی، سهم پاریتهٔ حالت نیز در برهم‌کنش‌ها لحاظ می‌شود. در نتیجه، برای توابع زوج داریم $(R_i f(x_i) = f(x_i))$ و برای توابع فرد $(R_i f(x_i) = -f(x_i))$، که تفاوت رفتار بوزون‌ها و فرمیون‌های دانکلی را از دیدگاه ساختار پاریته می‌تواند مشخص کند.

به‌شیوه‌ای مشابه با نوسان‌گرهای بوزونی و فرمیونی استاندارد، می‌توان متوسط عدد اشغال در هر تراز انرژی، یا به‌بیان دیگر تابع توزیع را استخراج کرد. این تابع توزیع وابسته به پارامتر دانکل است و در حالت حدی $\theta = 0$، به تابع توزیع بوز–اینشتین کلاسیک تقلیل می‌یابد. شکل دقیق این تابع توزیع به‌صورت زیر ارائه شده است [۸].

$$n_D(\epsilon) = \frac{2}{-1 + e^{2\beta\epsilon} z^{-2}} + \frac{1}{1+e^{\beta\epsilon} e^{2\theta\beta\epsilon} z^{-1}} \qquad ۹$$

که در آن $z = e^{-\gamma} = e^{\mu/K_B T}$ معرف گریزندگی است. تابع توزیع فوق که در واقع تابع توزیع بوز–دانکل است، زمانی که $\theta = 0$ باشد، به‌صورت $n_D(\epsilon) = \frac{1}{-1+e^{\beta\epsilon} z^{-1}}$ کاهش می‌یابد که درواقع همان توزیع بوز–اینشتین است. در شکل۱، توزیع مربوط به‌این آمار تعمیم‌یافته برحسب $x = \beta(\epsilon - \mu)$ برای مقادیر مختلف پارامتر دانکل ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در حالت $(\theta = 0)$، توزیع دقیقاً به توزیع بوز–اینشتین استاندارد کاهش می‌یابد که رفتار مرجع سیستم بوزونی ایده‌آل را مشخص می‌کند. با افزایش مقدار مثبت پارامتر دانکل، توزیع عدد اشغال نسبت به حالت بوز–اینشتین دچار تغییر شده و مقدار $n(x)$ برای هر (x) کاهش می‌یابد. با این حال، برای تمامی مقادیر (θ)، توزیع در ناحیهٔ $(x \to 0)$ رفتاری واگرا از خود نشان می‌دهد که ویژگی ذاتی سیستم‌های بوزونی و مرتبط با چگالش بوز–اینشتین است. همچنین با افزایش x، تمامی منحنی‌ها یکنواخت کاهش یافته و به صفر نزدیک می‌شوند، اما برای θ های بزرگ‌تر این افت سریع‌تر است.



شکل۱. توزیع بوز–دانکل برحسب $x = \beta(\epsilon - \mu)$ به‌ازای مقادیر مختلف پارامتر دانکل.

توابع ترمودینامیکی توزیع بوز–دانکل

با بهره‌گیری از تعاریف استاندارد در مکانیک آماری و همچنین استفاده از توابع پلی‌لگاریتم، برای تابع توزیع $n = \frac{1}{a+e^{\beta(\varepsilon-\mu)}}$ انرژی داخلی و تعداد ذرات از روابط ۵ و ٦ برای یک سیستم گاز ایده‌آل D بعدی در یک جعبه با حجم L^D به‌صورت زیر به‌دست می‌آید [۱۳–۱۱]

$$U = -\left(\frac{\Gamma\left(\frac{D}{\sigma}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}\frac{\beta^{-\left(\frac{D}{\sigma}+1\right)}}{a}Li_{\frac{D}{\sigma}+1}(-az)\right), \qquad ۱۰$$

$$N = -\left(\frac{\Gamma\left(\frac{D}{\sigma}\right)}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}\frac{\beta^{-\left(\frac{D}{\sigma}\right)}}{a}Li_{\frac{D}{\sigma}}(-az)\right). \qquad ۱۱$$

منظور از $Li_n(x)$ توابع پلی‌لگاریتم است. برای آمار کلاسیک $a = 0$ است، در حالی که برای آمار بوز–اینشتین $a = -1$ و برای آمار فرمی–دیراک نیز $a = +1$ است. حال، برای توزیع بوز–دانکل رابطهٔ۹ که یک تعمیم از آمار بوز–اینشتین است، می‌توان انرژی داخلی و تعداد کل ذرات برای ذراتی که از چنین آماری تبعیت می‌کنند، به‌صورت زیر استخراج کرد:

$$U = \qquad ۱۲$$
$$2\left(\frac{\Gamma\left(\frac{D}{\sigma}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}\right)\beta^{-\left(\frac{D}{\sigma}+1\right)}\left[2^{-\left(\frac{D}{\sigma}+1\right)}Li_{\frac{D}{\sigma}+1}(z^2)+(1+2\theta)^{-\left(\frac{D}{\sigma}+1\right)}Li_{\frac{D}{\sigma}+1}(-az)\right],$$

۱۳

$$\mathrm{N} = 2\left(\frac{\Gamma\left(\frac{D}{\sigma}\right)}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}\right)\beta^{-\left(\frac{D}{\sigma}\right)}\left[2^{-\left(\frac{D}{\sigma}\right)}Li_{\frac{D}{\sigma}}(z^2)-(1+2\theta)^{-\left(\frac{D}{\sigma}\right)}Li_{\frac{D}{\sigma}}(-az)\right]$$

که منظور از D بعد سیستم است و σ نیز توان در معادله پاشندگی انرژی ذرات برحسب تکانه در رابطهٔ $\varepsilon = \alpha p^{\sigma}$ را نشان می‌دهد. قابل ذکر است که در روابط (۱۲ و ۱۳)، برای یک سیستم $D = 3$ بعدی و غیر نسبیتی– $\sigma = 2$ به‌شکل سادهٔ زیر ساده می‌شود:

$$U = -\frac{3\,Li_{\frac{5}{2}}(z)}{2\left(\beta(1+2\theta)\right)^{\frac{5}{2}}}+\frac{3\,Li_{\frac{5}{2}}(z^2)}{4\sqrt{2}\,\beta^{\frac{5}{2}}}, \qquad ۱٤$$

$$N = -\frac{Li_{\frac{5}{2}}(z)}{\left(\beta(1+2\theta)\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3\,Li_{\frac{3}{2}}(z^2)}{\sqrt{2}\,\beta^{\frac{3}{2}}}. \qquad ۱۵$$

روابط بالا در صورتی که $(\theta = 0)$ قرار داده شود به‌صورت بوز–اینشتین استاندارد تبدیل می‌شوند:

$$U = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}\,\beta^{-\frac{5}{2}}\,Li_{\frac{3}{2}+1}(z), \qquad ۱٦$$

$$N = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\beta^{-\frac{3}{2}}\,Li_{\frac{3}{2}}(z). \qquad ۱۷$$

هندسهٔ ترمودینامیکی و خواص گاز ایده‌ال بوز–دانکل

برای یک سیستم بوز–دانکلی، عناصر متریک را می‌توان در یک حالت ساده شده با استفاده از جای‌گذاری روابط (۱٤و۱۵) در روابط٤ به‌صورت زیر استخراج کرد:

$$g_{\beta\beta} = -\frac{3}{8}\left(\frac{10\,(1+2\theta)Li_{\frac{5}{2}}(-z)}{(\beta+2\beta\theta)^{\frac{7}{2}}} - \frac{5\,Li_{\frac{5}{2}}(z^2)}{\sqrt{2}\,\beta^{\frac{5}{2}}}\right),$$

$$g_{\beta\gamma} = g_{\gamma\beta} = -\frac{3}{8}\left(\frac{4(1+2\theta)Li_{\frac{3}{2}}(-z)}{(\beta+2\beta\theta)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2\sqrt{2}\,Li_{\frac{3}{2}}(z^2)}{\sqrt{2}\,\beta^{\frac{5}{2}}}\right),$$

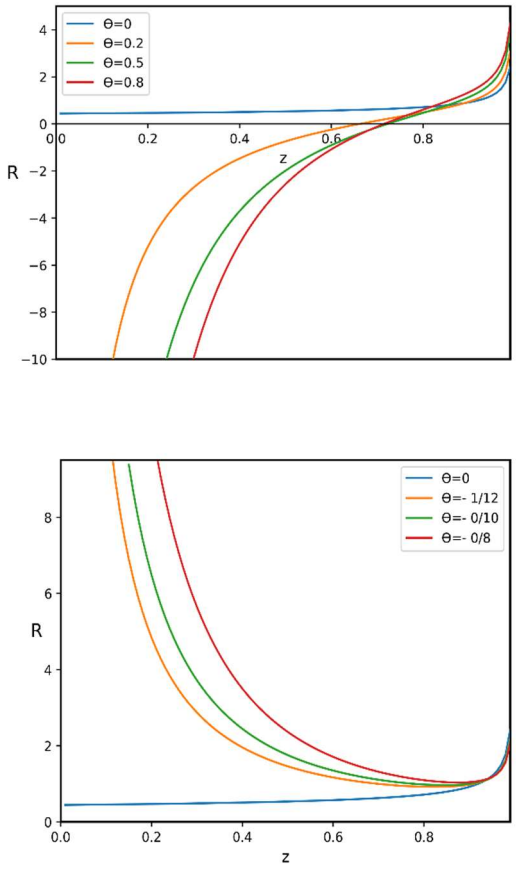
۱۸

$$g_{\gamma\gamma} = \left(\frac{(1+2\theta)Li_{\frac{1}{2}}(-z)}{(\beta+2\beta\theta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sqrt{2}\,Li_{\frac{1}{2}}(z^2)}{\beta^{\frac{3}{2}}}\right).$$

اکنون با استفاده از روابط بالا و رابطهٔ۳، می‌توان انحنای ترمودینامیکی سیستم را محاسبه کرد. اگرچه رابطهٔ به‌دست‌آمده از نظر ریاضی بسیار طولانی است، اما به‌منظور سهولت، رفتار آن به‌صورت نمودار در شکل۲ نمایش داده شده است.

مشخص است که علامت انحنای ترمودینامیکی برای مقادیر منفی پارامتر دانکل همچنان مشابه گاز ایده‌آل بوزونی، مثبت باقی می‌ماند. این بدان معناست که برهم‌کنش آماری جاذب سیستم تحت تأثیر قرار نگرفته است. یعنی مقادیر منفی پارامتر دانکل، گرچه مقدار انحنای ترمودینامیکی را نسبت به گاز ایده‌ال بوزونی دستخوش تغییر می‌کنند، اما روی علامت آن تأثیری ندارند. این امر به‌این معنی است که برهم‌کنش آماری برای مقادیر منفی پارامتر دانکب، کماکان جاذب است.

با این حال، برای مقادیر مثبت پارامتر تعمیم‌یافته دانکل، مشاهده می‌شود که انحنای ترمودینامیکی برای مقادیر کمتر از یک مقدار معین گریزندگی، z^*؛ منفی است و برای مقادیر بیشتر از آن مثبت می‌شود.



شکل۲. رفتار انحنای ترمودینامیکی برحسب گریزندگی به‌ازای مقادیر مختلف مثبت (بالایی) و منفی (پایینی) پارامتر دانکل برای فرایندهای همدما $(\beta = 1)$.

در بازه‌ای $z < z^*$، نوعی رفتار فرمیون‌گونه ظاهر می‌شود که با انحنای ترمودینامیکی منفی مشخص می‌گردد. در مقابل، برای مقادیر $z > z^*$، رفتار بوزون‌گونه با انحنای ترمودینامیکی مثبت دیده می‌شود که نشان‌دهندهٔ حفظ برهم‌کنش آماری جاذب است. علاوه‌بر این، برای تمام مقادیر پارامتر دانکل، مشابه گاز ایده‌آل

بوزونی، انحنای ترمودینامیکی در $z=1$ واگرا می‌شود که می‌تواند دال بر وجود گذار فازی مشابه با چگالش بوز–اینشتین باشد.

بحث و نتیجه‌گیری

در این تحقیق، به‌بررسی ویژگی‌های سیستم‌های بوز–دانکلی و تأثیر پارامتر دانکل بر خواص ترمودینامیکی آنها پرداخته شد. ابتدا عملگر دانکل معرفی گردید و سپس جبر مربوط به عمل‌گرهای خلق و فنای بوز–دانکل معرفی شد.

با استفاده از روابط تعمیم‌یافته، توزیع‌های آماری و توابع ترمودینامیکی مختلف برای سیستم‌های بوز–دانکل به‌دست آمد. این روابط به‌ویژه برای سیستم‌های گاز ایده‌آل در ابعاد مختلف و برای مقادیر مختلف پارامتر دانکل قابل استفاده هستند. توزیع‌های مربوط به این سیستم‌ها به‌وضوح وابستگی به پارامتر دانکل θ را نشان می‌دهند که در حالت خاص به‌توزیع معروف بوز–اینشتین تقلیل می‌یابند.

از جمله نکات جالب‌توجه در نتایج به‌دست‌آمده، بررسی انحنای ترمودینامیکی سیستم‌ها بود. برای مقادیر مثبت پارامتر دانکل، مشاهده شد که انحنای ترمودینامیکی می‌تواند رفتار متفاوتی را از خود نشان دهد. در مقادیر کمتر از مقدار معینی از گریزندگی، انحنای ترمودینامیکی منفی بود که نشان‌دهنده رفتار فرمیون‌گونه است، در حالی که برای مقادیر بیشتر از آن، انحنا مثبت و به رفتار بوزون‌گونه متمایل می‌شود. این تغییرات در انحنا نشان‌دهندهٔ تغییرات در برهم‌کنش‌های آماری سیستم و نحوهٔ تأثیر پارامتر دانکل بر ویژگی‌های ترمودینامیکی آن است.

یکی از نکات دیگر، واگرایی انحنای ترمودینامیکی در $z=1$ بود که مشابه گاز ایده‌آل بوزونی متداول است. این ویژگی از اهمیت بالایی برخوردار است زیرا می‌تواند نشانه‌ای از وجود گذار فاز در این سیستم باشد. پیش‌بینی می‌شود که گذار فازی مانند چگالش بوز–اینشتین وجود داشته باشد که بررسی چنین گذاری و یافتن دمای گذار که به احتمال زیاد باید وابسته به پارامتر دانکل باشد، موضوع پژوهش آیندهٔ ما در این زمینه است.

می‌دانیم که انحنای ترمودینامیکی گاز ایده‌ال فرمیونی منفی است که نشان‌دهندهٔ برهم‌کنش آماری دافع برای این ذرات است. با این وجود، انحنای ترمودینامیکی برای گاز ایده‌ال بوزونی مثبت است و بر برهم‌کنش آماری جاذب بوزون‌ها دلالت دارد. همچنین انحنای ترمودینامیکی گاز بوزونی در $z = 1$ واگرا می‌شود که بر وجود چگالش بوز–اینشتین در این مقدار بحرانی گریزندگی تأکید دارد. نکته مهم و جالب توجه آن است که به‌ازای مقادیر مثبت پارامتر دانکل؛ انحنای ترمودینامیکی منفی و مثبت وجود دارد. شاید بتوان چنین رفتاری را به‌چگالش گاز ایده‌ال فرمیونی مرتبط ساخت. چنانچه می‌دانیم علیرغم خاصیت طرد فرمیون‌ها که در واقع منشأ برهم‌کنش آماری دافع آنها است، مشاهده می‌شود که در دماهای پایین سیستم می‌تواند با تشکیل زوج‌های کوپر، رفتاری بوزون گونه از خود به‌نمایش بگذارد و سپس این جفت‌های کوپر می‌توانند در دماهای پایین‌تر، فاز چگالیده را تشکیل دهند. بررسی عمیق‌تر این مسأله در دست تحقیق است.

مرجع‌ها

[1] C.F. Dunkl, Differential-difference operators associated to reflection groups, Trans. Amer. Math. Soc. 311 (1989) 167 – 183. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1989-0951883-8

[2] C.F. Dunkl, Symmetric functions and B-invariant spherical harmonics, J. Phys. A: Math. Gen. 35 (2002) 10391–10404. https://doi.org/10.1088/0305-4470/35/48/312

[3] V.X. Genest, M.E.H. Ismail, L. Vinet, A. Zhedanov, The Dunkl oscillator in the plane: I. Superintegrability, constructibility and structure algebra, J. Phys. A: Math. Theor. 46 (2013) 145201. https://doi.org/10.1088/1751-8113/46/14/145201

[4] M. Rösler, Generalized Hermite polynomials and the heat equation for Dunkl operators, Commun. Math. Phys. 192 (1998) 519–542. https://doi.org/10.1007/s002200050307

[5] C.F. Dunkl, Y. Xu, Orthogonal Polynomials of Several Variables, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2014. https://doi.org/10.1017/CBO9781107786134

[6] M. Rösler, M. Voit, Markov processes related with Dunkl operators, Adv. Appl. Math. 21 (1998) 575–643. https://doi.org/10.1006/aama.1998.0609

[7] B. Hamil, B.C. Lütfüoğlu, M. Merad, Dunkl-Schrodinger Equation in Higher Dimension, arXiv:2409.12653 [quant-ph] (2024). https://doi.org/10.48550/arXiv.2409.12653

[8] F. Merabtine, B. Hamil, B.C. Lütfüoğlu, A. Hocine, M. Benarous, Thermodynamics of the Dunkl-oscillator in a wire with a point interaction, J. Stat. Mech. (2023) 053102. https://doi.org/10.1088/1742-5468/acd106

[9] G. Ruppeiner, Thermodynamics: A Riemannian geometric model, Phys. Rev. A 20 (1979) 1608–1613. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.20.1608

[10] B. Mirza, H. Mohammadzadeh, Thermodynamic geometry of the relativistic anyon gas, Phys. Rev. E 82 (2010) 031137. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.82.031137

[11] H. Mehri-Dehnavi, H. Mohammadzadeh, Geometric thermodynamics of the quantum Dunkl gas, J. Phys. A: Math. Theor. 53 (2020) 375009. https://doi.org/10.1088/1751-8121/aba98a

[12] H. Mohammadzadeh, Z. Ebadi, R. Roozehdar, M. Amiri, Thermodynamics and thermodynamic geometry of fractional anyon gas, J. Many-Body Syst. 12 (2022) 115–128. https://doi.org/10.22055/jrmbs.2022.17343

[13] B. Mirza, H. Mohammadzadeh, Nonperturbative thermodynamic geometry of anyon gas, Phys. Rev. E 80 (2009) 011132. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.80.011132

[14] G. Ruppeiner, Riemannian geometry in thermodynamic fluctuation theory, Rev. Mod. Phys. 67 (1995) 605–659. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.67.605

[15] H. Esmaili, H. Mohammadzadeh, M. Biderang, M.N. Najafi, Thermodynamic geometry of a system with unified quantum statistics, Phys. Rev. E 109 (2024) 044104. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.109.044104

[16] M. Seifi, Z. Ebadi, H. Agahi, H. Mehri-Dehnavi, H. Mohammadzadeh, Intrinsic attractive and repulsive interactions: From classical to quantum statistics in the generalized Maxwell–Boltzmann distribution, Phys. Rev. E 111 (2025) 054114. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.111.054114