Document Type: Full length research Paper
Pages: 39-47

Coupling and Energy Transfer between Longitudinal and Radial Fields in a Parabolic Plasma Wakefield Accelerator Driven by a Proton Beam

Yasaman Golian*, Saleheh Beheshtipour

Department of Physics, Central Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran
Institute of Biosocial and Quantum Science and Technologies, CT.C, Islamic Azad University, Tehran, Iran

Received: 15.10.2025 Final revised: 25.04.2026 Accepted: 01.07.2026 Published On-Line: 12.07.2026

DOI: 10.22055/jrmbs.2026.20761

Abstract

This study presents a theoretical model for accelerating charged particle beams in a plasma channel with a parabolic density profile. A Gaussian proton beam is used to excite longitudinal and radial wakefields, described by Whittaker functions. The radial wakefield exhibits anomalous behavior, with its amplitude increasing as a function of the distance from the beam axis. This phenomenon is attributed to a gradual energy transfer from on-axis longitudinal oscillations to radial oscillations near the channel wall. Two-dimensional simulations performed with the L-CODE show excellent agreement with the analytical results. Furthermore, a comparison of the wakefields at temperatures of 0 eV and 1 eV reveals a reduction in amplitude with increasing temperature, which is caused by enhanced ion mobility and intensified Landau damping—a wave-particle interaction mechanism occurring in collisionless plasmas.

Keywords: Gaussian Profile, Whittaker Function, Parabolic Plasma Channel, Wakefields, L-CODE.

* Corresponding Author: y.golian@gmail.com

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

مقاله پژوهشی کامل

پدیدهٔ جفت‌شدگی و انتقال انرژی بین میدان‌های طولی و شعاعی در یک شتاب‌دهنده پلاسمایی محرک پروتونی با کانال سهموی

یاسمن گلیان*، صالحه بهشتی پور

گروه فیزیک، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

دانشکده علوم و فناوری‌های زیست اجتماعی و کوانتومی، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

دریافت: ۱٤۰٤/۰۷/۲۳ ویرایش نهائی: ۱٤۰۵/۰۲/۰۵ پذیرش: ۱٤۰۵/۰٤/۱۰ انتشار بر خط: ۱٤۰۵/۰٤/۲۱

DOI: 10.22055/jrmbs.2026.20761

چکیده

این پژوهش یک مدل نظری برای شتاب‌دهی باریکه‌های ذرات باردار در کانال پلاسما با پروفایل چگالی سهموی ارائه می‌دهد. یک باریکهٔ پروتون گاؤسی برای برانگیختن میدان‌های دنباله‌ای طولی و شعاعی استفاده شده که توسط توابع ویتاکر توصیف می‌شوند. میدان دنباله‌ای شعاعی رفتاری غیرعادی نشان می‌دهد به‌طوری که دامنه آن با افزایش فاصله از محور باریکه زیاد می‌شود. این پدیده ناشی از انتقال تدریجی انرژی از نوسانات طولی روی محور به نوسانات شعاعی نزدیک دیواره کانال است. شبیه‌سازی‌های دوبعدی انجام‌شده با کد L-CODE تطابق عالی با نتایج تحلیلی نشان می‌دهند. همچنین مقایسهٔ میدان‌های دنباله‌ای در دماهای ۰ و ۱ الکترون‌ولت نشان‌دهندهٔ کاهش دامنه با افزایش دماست که به‌دلیل افزایش تحرک یون‌ها و تشدید میرایی لاندائو ناشی می‌شود؛ میرایی لاندائو مکانیزم برهم‌کنش موج‌ذره در پلاسمای بدون برخورد است.

کلیدواژگان: پروفایل گاؤسی، توابع ویتاکر، کانال پلاسمای سهموی، میدان دنباله‌ای، L-CODE

مقدمه

شتاب‌دهی به‌کمک میدان‌های دنباله‌ای پلاسما در سال‌های اخیر مورد توجه گسترده‌ای قرار گرفته است [٦-۱]. این میدان‌ها را می‌توان از طریق یک پرتو لیزری کوتاه و پرتوان [۵,۷] یا باریکهٔ ذرات باردار [۸,۹] در پلاسما ایجاد کرد. در مطالعات پیشین، تولید میدان دنباله‌ای در پلاسمای با ناهمگونی شعاعی با استفاده از باریکه‌های ذرات باردار و نیز در پلاسمای با پروفایل سهموی با محرک لیزری گزارش شده است [۱۳-۱۰]. با این حال، بیشتر پژوهش‌ها در کانال‌های پلاسمایی با پروفایل سهموی و با کمینه چگالی روی محور متمرکز بوده‌اند که به‌دلیل ویژگی‌های کانال‌شدن در پلاسماست. در مقابل، برای محرک‌های متشکل از ذرات باردار، حالتی از پلاسما که چگالی آن در راستای شعاعی ناهمگون بوده و روی محور بیشینه باشد، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. قابلیت تحقق این

* نویسنده مسئول: y.golian@gmail.com

باز نشر این مقاله با ذکر منبع آزاد است.

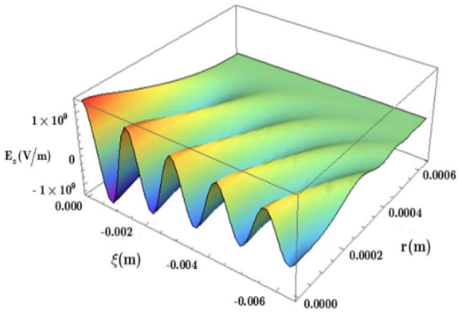
این مقاله تحت مجوز کریتیو کامنز تخصیص ٤.۰ بین‌المللی می‌باشد

پروفایل در آزمایشگاه برای محرک لیزری [۱۴] و در شبیه‌سازی برای محرک پروتونی [۸] نشان داده شده است. این ستون‌های پلاسمایی با چگالی بیشینه روی محور، کاربردهای بالقوه‌ای برای جبران انحنای نامطلوب جبهه موج در میدان‌های دنباله‌ای غیرخطی دارند [۱۰]. در مطالعهٔ پیشین [۱۵]، روش تحلیلی برای محاسبهٔ میدان‌های دنباله‌ای برانگیخته‌شده توسط باریکه‌ای از ذرات باردار در پلاسمایی با پروفایل چگالی سهموی ارائه شد و حل دقیق معادلات حاکم با استفاده از توابع ویتاکر به‌دست آمد. در نتایج آن پژوهش، رفتار غیرمعمولی مشاهده شد که در آن میدان الکتریکی شعاعی با فاصله گرفتن از باریکه افزایش می‌یافت. هدف اصلی مقالهٔ حاضر، بررسی و تبیین این ویژگی غیرعادی است. در این مقاله، ابتدا خلاصه‌ای از مدل نظری [۱۵] ارائه شده، سپس با شبیه‌سازی دوبعدی L-CODE نتایج اعتبارسنجی می‌گردد و در پایان میدان‌ها و پتانسیل در دو دمای متفاوت مقایسه می‌شوند.

مدل نظری

در مدل نظری ارائه‌شده در مطالعهٔ [۱۵]، یک باریکهٔ پرچگال در نظر گرفته می‌شود که در یک پلاسمای متقارن محوری انتشار یافته و موجب جابه‌جایی و حرکت الکترون‌های پلاسما می‌گردد. پلاسما دارای چگالی متغیر به‌صورت $n = n_0\left(1-\frac{r^2}{r_{pl}^2}\right)$ است که r_{pl} شعاع پلاسما و r مختصات شعاعی است. بیشینه چگالی پلاسما n_0 روی محور انتشار باریکه در جهت z است. چگالی باریکه برابر $n_b = n_{b0}e^{\frac{-r^2}{2\sigma_r^2}}e^{\frac{-\xi^2}{2\sigma_z^2}}$ که $\xi=z-ct$، c سرعت نور، $n_{b0}=N/\left((2\pi)^{3/2}\sigma_r^2\sigma_z\right)$ که N تعداد کل ذرات در باریکه و σ_r و σ_z به‌ترتیب مشخصه‌های شعاعی و طولی است. برای پاسخ خطی پلاسما، چگالی پلاسمای بهینه با مشخصه طولی باریکه با استفاده از شرط $\frac{c}{\omega_{p0}} \equiv \frac{1}{k_{p0}} = \frac{\sigma_z}{\sqrt{2}}$ به‌دست می‌آید که $\omega_{p0} = \left(\frac{n_0 e^2}{m\varepsilon_0}\right)^{0.5}$ فرکانس پلاسما و k_{p0} عدد موج پلاسما است. پارامترهای پلاسما و مشخصه‌های باریکه عبارتند از: n_0 برابر ۶×۱۰^{۱۴} بر سانتی‌متر مکعب، مشخصه‌های طولی و شعاعی باریکه به‌ترتیب ۰٫۱ و ۰٫۴۳ میلی‌متر، تعداد کل ذرات ۱×۱۰^{۱۱}، شعاع کانال پلاسما ۰٫۶۴ میلی‌متر و $\frac{c}{\omega_{p0}}$ برابر ۰٫۲۱۵ میلی‌متر در نظر گرفته شده است.

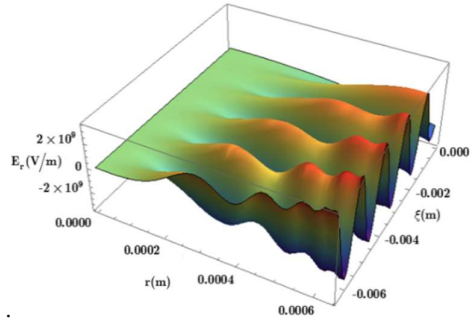
در مطالعهٔ [۱۵]، حل کامل معادلات میدان‌های دنباله‌ای طولی و شعاعی به‌همراه نمودارهای دوبعدی مربوط به میدان‌های الکتریکی (شعاعی و طولی) و میدان مغناطیسی، بر اساس روابط تحلیلی ارائه شده است. شکل۱ چگونگی تغییرات میدان الکتریکی طولی را در فضای سه‌بعدی نمایش می‌دهد. همان‌طور که در شکل مشهود است، بزرگی این میدان با افزایش فاصله شعاعی (r) به‌سمت صفر میل کرده و با دور شدن از پشت باریکه محرک کاهش می‌یابد.



شکل۱. رفتار سه‌بعدی میدان الکتریکی طولی (E_z) برحسب متغیر شعاعی (r) و متغیر محوری (ξ).

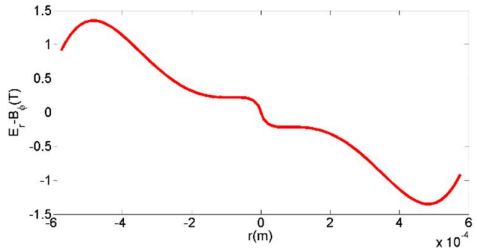
شکل۲ تغییرات سه‌بعدی میدان الکتریکی شعاعی را برحسب فاصلهٔ شعاعی (r) و متغیر محوری (ξ) نمایش می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، این میدان در

محور مرکزی (r=0) به صفر گرایش دارد، اما دامنهٔ آن با فاصله گرفتن از پشت باریکه افزایش می‌یابد.



شکل۲. رفتار سه‌بعدی میدان الکتریکی شعاعی (E_r) برحسب متغیر شعاعی (r) و متغیر محوری (ξ).

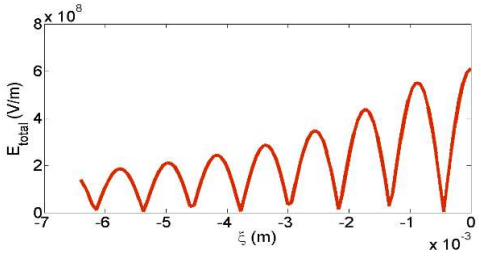
شکل۳ تغییرات مؤلفه‌های میدان دنباله‌ای E_r-B_φ را در راستای شعاعی و در یک بازه گسترده نمایش می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در نزدیکی محور، رفتار نیروی کانونی‌کننده نرمال‌شده توسط کانال پلاسما به‌وضوح قابل تشخیص است. علاوه بر این، پیچ‌هایی در نمودار مشاهده می‌شود که در دو انتهای بازه مورد بررسی تغییر علامت می‌دهند. همچنین، شیب نمودار برای مقادیر مختلف ξ نیز قابل استنتاج است.



شکل۳. تغییرات مؤلفه‌های میدان دنباله‌ای (E_r - B_φ) در راستای شعاعی (r) برای ξ=2r_{pl} .

تحلیل روابط تحلیلی مرجع [۱۵] نشان می‌دهد که با افزایش ξ، جملهٔ اول به‌دلیل $e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_z^2}}$ کاهش یافته و جملهٔ دوم غالب می‌شود که باعث افزایش میدان شعاعی می‌گردد. بر خلاف پلاسمای همگن که فاصلهٔ کانونی ذرات باردار حدود یک‌چهارم طول‌موج پلاسما است، در کانال سهموی این فاصله به حدود یک‌دوم طول‌موج پلاسما افزایش می‌یابد که با نتایج پیشین برای محرک لیزری [۱٦] همخوانی دارد.

با مقایسه شکل‌های۱ و ۲، میدان الکتریکی کل $E_{tot}=\sqrt{E_z^2+E_r^2}$، با افزایش فاصله از پشت باریکه کاهش می‌یابد که در شکل٤ نشان داده شده است. این رفتار نشان‌دهنده انتقال تدریجی انرژی از نوسانات طولی به نوسانات شعاعی در ناحیه لبه کانال است.



شکل٤. میدان الکتریکی کل برحسب متغیر محوری (ξ).

شبیه‌سازی با کد L-CODE

برای اعتبارسنجی محاسبات تحلیلی، شبیه‌سازی شتاب‌دهی یک باریکه پروتونی در کانال پلاسما با استفاده از پارامترهای مشابه با مدل نظری انجام شد. این شبیه‌سازی‌ها با به‌کارگیری کد الکترومغناطیسی نسبیتی دوبعدی L-CODE صورت پذیرفته است [۱۷]. این کد در مختصات استوانه‌ای با مدل جنبشی ماکروذرات عمل می‌کند. برای انطباق با مدل نظری، یک پروفایل چگالی سهموی اولیه به‌صورت یک فایل خارجی تعریف و در شبیه‌سازی استفاده شد. همچنین، یک پنجره شبیه‌سازی تخصصی برای رصد دقیق رفتار میدان‌ها در نظر گرفته شده است.

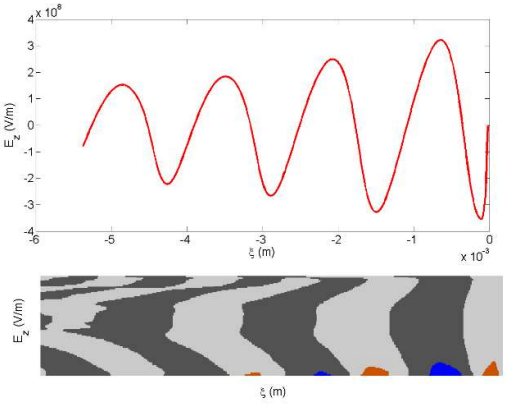
پنجره شبیه‌سازی در نظر گرفته شده در این شبیه‌سازی‌ها در واحد (c/ω_p) دارای ابعاد ۲۵ (در ξ) و ۵ (در r) است. بازه‌های r و ξ در واحد (c/ω_p) برابر ۰٫۰۵ در نظر گرفته شده است. باریکه محرک با ۲×۱۰^{۸} ماکروذره در هر لایه و ۲۰۰۰۰ ماکروذره مدل شده

است. سایر پارامترهای پلاسما و ابعاد هندسی باریکه محرک، که مشابه مقادیر به‌کاررفته در محاسبات تحلیلی هستند، در جدول۱ ارائه شده‌اند.

جدول۱. پارامترهای باریکه و پلاسما در شبیه‌سازی‌های L-CODE.

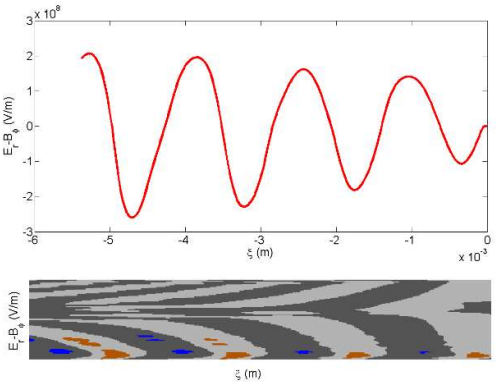
پارامتر	مقادیر
شعاع کانال پلاسما r_{pl}	$0/64\times10^{-3}\text{m}=2/97\ \frac{c}{\omega_{p0}}$
تعداد ذرات پلاسما N	1×10^{11}
مشخصه شعاعی باریکه σ_r	$0/43\times10^{-3}\ \text{m}=2\frac{c}{\omega_{p0}}$
مشخصه عرضی باریکه σ_z	$1\times10^{-4}\ \text{m}=0/46\frac{c}{\omega_{p0}}$
عدد موج پلاسما k_{p0}	$4/65\times10^{3}\ \text{m}^{-1}$
بیشینه چگالی پلاسما n_0	$6\times10^{14}\ \text{cm}^{-3}$

شکل۵ رفتار میدان الکتریکی طولی و نگاره رنگی آن را در جهت طولی نمایش می‌دهد. مطابق با داده‌های شبیه‌سازی، این میدان دارای رفتار نوسانی است و دامنه آن با فاصله گرفتن از پشت باریکه کاهش می‌یابد که با نتایج تحلیلی هم‌خوانی دارد. همچنین، نواحی آبی و نارنجی در نگاره به‌ترتیب نمایانگر مقادیر مثبت و منفی میدان شتاب‌دهنده هستند که شدت آن‌ها نیز با افزایش فاصله از باریکه به‌تدریج تضعیف می‌شود.



شکل۵. رفتار میدان دنباله‌ای طولی (E_z) برحسب متغیر محوری (ξ) روی محور کانال (r=0) در دمای پلاسمای صفر. نگاره رنگی در پایین، توزیع دوبعدی میدان را در پنجره شبیه‌سازی نشان می‌دهد. در نگاره رنگی، نواحی آبی نمایانگر مقادیر مثبت و نواحی نارنجی نمایانگر مقادیر منفی میدان شتاب‌دهنده هستند. شدت رنگ‌ها با افزایش فاصله از باریکه به‌تدریج تضعیف می‌شود.

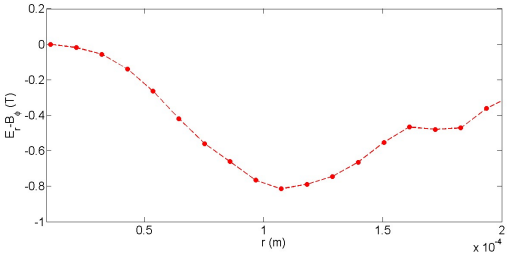
شکل۶ رفتار میدان دنباله‌ای شعاعی در راستای محوری و نگاره رنگی آن را در محدودهٔ پنجره شبیه‌سازی ویژه‌ای نمایش می‌دهد. میدان دنباله‌ای شعاعی برانگیخته‌شده توسط باریکه پروتونی، مطابق با پیش‌بینی تحلیلی، با فاصله گرفتن از پشت باریکه افزایش می‌یابد. در این نگاره، نواحی آبی و نارنجی به‌ترتیب نشان‌دهندهٔ مقادیر مثبت و منفی این میدان هستند که دامنهٔ آنها با افزایش فاصله، رشد تدریجی دارد.



شکل۶. تغییرات میدان دنباله‌ای شعاعی (E_r-B_φ) برحسب متغیر محوری (ξ) روی محور کانال (r=0) در دمای پلاسمای صفر. نگاره رنگی در پایین، توزیع دوبعدی میدان را در پنجره شبیه‌سازی نشان می‌دهد. نواحی آبی و نارنجی به‌ترتیب نمایانگر مقادیر مثبت و منفی میدان هستند. شدت رنگ‌ها با افزایش فاصله از باریکه به‌تدریج افزایش می‌یابد.

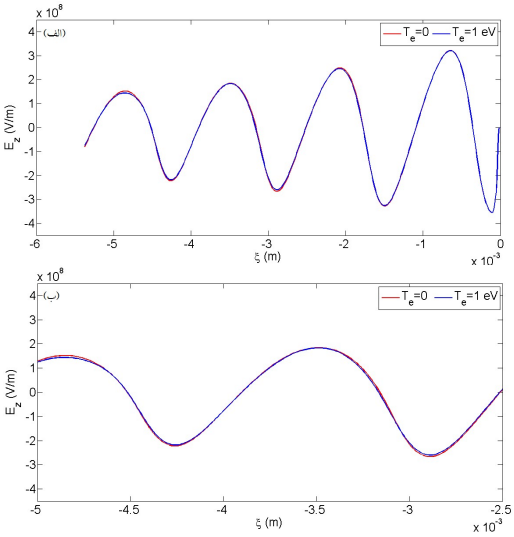
تغییرات میدان دنباله‌ای شعاعی E_r-B_φ در جهت شعاعی در شکل۷ در $\xi=r_{pl}$ نشان داده شده است. محدودهٔ انتخابی برای ترسیم نمودار، در راستای محوری از ۷ تا ۱۲ و در راستای شعاعی از ۰ تا ۳ (برحسب واحد c/ω_p) در نظر گرفته شده است.

همان‌طور که انتظار می‌رود، اندازهٔ میدان دنباله‌ای شعاعی روی محور برابر با صفر است. در این شکل، حالت کانونی خطی ناشی از اثر کانال پلاسما به‌وضوح قابل مشاهده است. علاوه بر این، شیب نمودار با تغییر پارامتر ξ به‌طور محسوسی تغییر می‌کند.



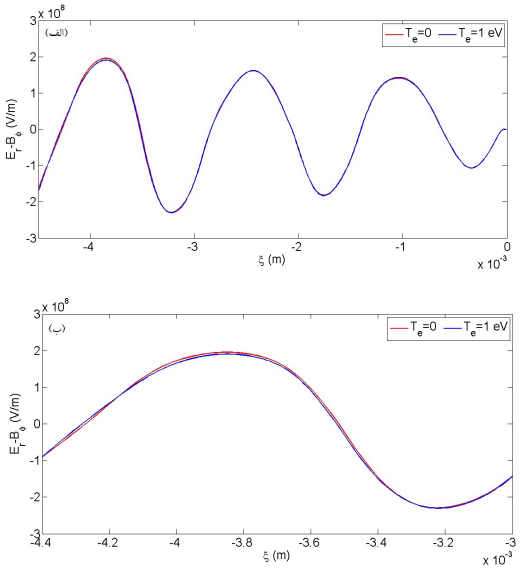
شکل۷. تغییرات میدان دنباله‌ای شعاعی در جهت شعاعی برای $\xi = r_{pl}$.

در شکل‌های۸، میدان‌های دنباله‌ای طولی در دو دمای صفر و ۱ الکترون‌ولت مقایسه شده‌اند. در حالتی که الکترون‌های پلاسما دارای دمای اولیه غیرصفر باشند، مسیر حرکت آن‌ها اندکی در مقایسه با حالت دمای صفر منحرف شده و برخی از این الکترون‌ها زودتر از الکترون‌های مربوط به حالت دمای صفر به محور می‌رسند. اختلاف بین دو دما در فواصل دورتر از پشت باریکه آشکارتر می‌شود [٤].



شکل۸. مقایسه تغییرات میدان دنباله‌ای طولی (E_z) در جهت طولی **(ξ)** در دو دمای پلاسمای صفر و ۱ الکترون-ولت الف) بازهٔ گسترده و ب) بازهٔ محدود.

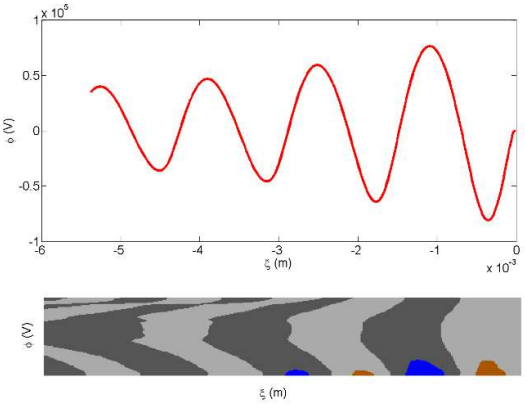
در شکل‌های۹ الف و ب، میدان‌های دنباله‌ای شعاعی در دو دمای صفر و ۱ الکترون‌ولت، در دو بازهٔ گسترده و محدود در $r=1\ (c/\omega_p)$ مقایسه شده‌اند. همان‌طور که در شکل۸ مشاهده شد، با افزایش دمای الکترون‌های پلاسما، دامنه میدان دنباله‌ای شعاعی در مقایسه با حالت دمای صفر کاهش می‌یابد. این کاهش دامنه در فواصل دورتر از باریکه آشکارتر است که برای وضوح بهتر، در شکل۹ب در یک بازهٔ محدود نمایش داده شده است.



شکل۹. مقایسه تغییرات میدان دنباله‌ای شعاعی $(E_r - B_\varphi)$ در جهت طولی **(ξ)** در دو دمای پلاسمای صفر و ۱ الکترون ولت الف: بازهٔ طولی گسترده و ب: بازهٔ محدود.

همچنین، تغییرات پتانسیل میدان دنباله‌ای در راستای انتشار باریکه و نگاره رنگی آن روی محور، در شکل۱۰ ارائه شده است. همان‌گونه که در بخش تحلیلی به‌آن اشاره شد، E_{tot} با افزایش فاصله از پشت باریکه کاهش

می‌یابد. در نتیجه، پتانسیل مؤثر میدان دنباله‌ای که تابعی از میدان کل است، با دور شدن از باریکه کاهش می‌یابد.



شکل ۱۰. رفتار پتانسیل میدان دنباله‌ای در جهت طولی (ξ) در دمای پلاسمای صفر. نگاره رنگی در پایین، توزیع دوبعدی پتانسیل را در پنجره شبیه‌سازی نشان می‌دهد. در نگاره رنگی، نواحی آبی نمایانگر مقادیر مثبت و نواحی نارنجی نمایانگر مقادیر منفی پتانسیل هستند.

بحث و نتیجه‌گیری

این پژوهش از یک مدل نظری برای بررسی برهم‌کنش باریکه‌های باردار با پلاسما در تولید میدان دنباله‌ای خطی بهره می‌برد. در این مدل، از کانال پلاسمایی با پروفایل چگالی سهموی استفاده شده است که چگالی آن در راستای شعاعی تغییر می‌کند، به‌طوری که بیشینه چگالی روی محور انتشار قرار دارد و با فاصله گرفتن از محور به‌تدریج کاهش می‌یابد. برای برانگیختن میدان دنباله‌ای در این کانال، از یک باریکه پروتونی با توزیع گاؤسی استفاده شده است.

یافتهٔ قابل‌توجه حاصل از این مدل‌سازی برای پروفایل سهموی چگالی، رفتار متفاوت مؤلفه‌های میدان است: دامنه میدان الکتریکی شعاعی برانگیخته‌شده توسط باریکه با فاصله گرفتن از پشت آن افزایش می‌یابد، در حالی‌که دامنه میدان دنباله‌ای طولی تحت همان شرایط کاهش نشان می‌دهد. با این حال، نرخ افزایش دامنه میدان شعاعی کمتر از نرخ کاهش دامنه میدان طولی است که در نهایت به‌کاهش پتانسیل مؤثر کل میدان با افزایش فاصله از باریکه منجر می‌شود. این پدیده از نظر فیزیکی مشابه جفت‌شدگی مدها در راه‌اندازهای موج ناهمسان است و با بقای انرژی در سیستم سازگاری کامل دارد. اگرچه اثر مشابهی پیش‌تر در میدان‌های دنباله‌ای ایجادشده توسط لیزر در پلاسما گزارش شده بود، این پژوهش برای نخستین بار این پدیدهٔ غیرمعمول را در میدان‌های دنباله‌ای برانگیخته‌شده توسط یک باریکه ذرات باردار آشکار کرده و به‌طور تحلیلی و عددی بررسی می‌کند. شبیه‌سازی‌های دوبعدی با L-CODE و پارامترهای مشابه مدل نظری، هم‌خوانی قابل‌توجهی با نتایج تحلیلی نشان دادند. همچنین رفتار میدان‌ها در دو دمای متفاوت پلاسما مقایسه شد. در دمای غیرصفر، انحراف مسیر الکترون‌ها باعث می‌شود برخی زودتر به محور برسند؛ این اثر در فواصل دورتر از باریکه مشهودتر است. علاوه بر این، دامنه میدان‌ها و پتانسیل در شرایط پلاسمای با دمای غیرصفر، در مقایسه با حالت ایده‌ال دمای صفر، کاهش نشان می‌دهد. علت آن را می‌توان در افزایش تحرک یون‌ها و تشدید پدیده میرایی لاندائو جستجو کرد که در پلاسمای بدون برخورد و ناشی از برهم‌کنش موج–ذره رخ می‌دهد.

سپاسگزاری

بر خود لازم می‌دانم که عمیق‌ترین سپاس و احترام خود را نثار روان پاک استاد فقید، **دکتر داود درانیان** نمایم. بینش ژرف، راهنمایی‌های حکیمانه و شکیبایی

بی‌پایان ایشان بود که چراغ راه این پژوهش شد. آرزوی مغفرت و علو درجات برای آن استاد گرانقدر دارم.

مرجع‌ها

[1] E. Esarey, C.B. Schroeder, W.P. Leemans, Physics of laser-driven plasma-based electron accelerators, Rev. Mod. Phys. 81 (2009) 1229–1285. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.81.1229.

[2] B. Hidding, R. Assmann, M. Bussmann, D. Campbell, Y. Chang, S. Corde, J. Couperus Cabadağ, A. Debus, A. Döpp, M. Gilljohann, J. Götzfried, F.M. Foerster, F. Haberstroh, F. Habib, T. Heinemann, D. Hollatz, A. Irman, M. Kaluza, S. Karsch, O. Kononenko, A. Knetsch, T. Kurz, S. Kuschel, A. Köhler, A. Martinez de la Ossa, A. Nutter, R. Pausch, G. Raj, U. Schramm, S. Schöbel, A. Seidel, K. Steiniger, P. Ufer, M. Yeung, O. Zarini, M. Zepf, Progress in hybrid plasma wakefield acceleration, Photonics. 10 (2023) 99.

https://doi.org/10.3390/photonics10020099.

[3] B. Hidding, B. Foster, M.J. Hogan, P. Muggli, J.B. Rosenzweig, Directions in plasma wakefield acceleration, Phil. Trans. R. Soc. A. 377 (2019) 20190215. https://doi.org/10.1098/rsta.2019.0215.

[4] C. Joshi, E. Adli, W. An, C.E. Clayton, S. Corde, S. Gessner, M.J. Hogan, M. Litos, W. Lu, K.A. Marsh, W.B. Mori, N. Vafaei-Najafabadi, B. O'Shea, X. Xu, G. White, V. Yakimenko, Plasma wakefield acceleration experiments at FACET II, Plasma Phys. Control. Fusion. 60 (2018) 034001. https://doi.org/10.1088/1361-6587/aaa2e3.

[5] C. Joshi, The development of laser- and beam-driven plasma accelerators as an experimental field, Phys. Plasmas. 14 (2007) 055501. https://doi.org/10.1063/1.2721965.

[6] A. Down, Particle beam waist location in plasma wakefield acceleration: Introduction and background, Am. J. Undergrad. Res. 5 (2007) 3. https://doi.org/10.33697/ajur.2007.003.

[7] T. Tajima, J. Dawson, Laser electron accelerator, Phys. Rev. Lett. 43 (1979) 267–270. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.43.267.

[8] K.V. Lotov, A.P. Sosedkin, A.V. Petrenko, L.D. Amorim, J. Vieira, R.A. Fonseca, L.O. Silva, E. Gschwendtner, P. Muggli, Electron trapping and acceleration by the plasma wakefield of a self-modulating proton beam, Phys. Plasmas. 21 (2014) 123116–123125. https://doi.org/10.48550/arXiv.1408.4448.

[9] R.T. Sandberg, A.G.R. Thomas, Electron-beam-driven plasma wakefield acceleration of photons, Phys. Plasmas. 30 (2023) 113105. https://doi.org/10.1063/5.0174055.

[10] G. Khachatryan Arsen, Excitation of nonlinear two-dimensional wake waves in radially nonuniform plasma, Phys. Rev. E. 60 (1999) 6210–6218.

https://doi.org/10.1103/PhysRevE.60.6210.

[11] P. Jha, P. Kumar, A.K. Upadhyaya, G. Raj, Electric and magnetic wakefields in a plasma channel, Phys. Rev. Accel. Beams. 8 (2005) 071301. https://doi.org/10.1103/PhysRevSTAB.8.071301.

[12] G. Doumy, F. Quéré, O. Gobert, M. Perdrix, Ph. Martin, P. Audebert, J.C. Gauthier, J.P. Geindre, T. Wittmann, Complete characterization of a plasma mirror for the production of high-contrast ultraintense laser pulses, Phys. Rev. E. 69 (2004) 026402. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.69.026402.

[13] R. Fallah, S.M. Khorashadizadeh, Numerical analysis of wakefield generated by a Gaussian microwave pulse in a plasma waveguide, J. Res. Many-Body Syst. 8 (2018) 153-162.

https://doi.org/10.22055/jrmbs.2018.13956. [In Persian]

[14] S. Chen, G.S. Sarkisov, A. Maksimchuk, R. Wagner, D.P. Umstadter, Evolution of a plasma waveguide created during relativistic ponderomotive self-channeling of an intense laser pulse, Phys. Rev. Lett. 80 (1998) 2610–2614. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2610.

[15] Y. Golian, M. Aslaninejad, D. Dorranian, Whittaker functions in beam driven plasma

wakefield acceleration for a plasma with a parabolic density profile, Phys. Plasmas. 23 (2016)013109.

https://doi.org/10.1063/1.4940347.

[16] E. Cormier-Michel, E. Esarey, C. Geddes, C.B. Schroeder, K. Paul, P.J. Mullowney, J. Cary, W.P. Leemans, Control of focusing fields

in laser-plasma accelerators using higher-order modes, Phys. Rev. Accel. Beams. 14 (2011) 1–14. https://doi.org/10.1103/PhysRevSTAB.14.031303.

[17] LCODE, LCODE - plasma wakefield simulation code. https://lcode.info, 2019–2025 (accessed 1 July 2026).